가속기 빔동역학 강의 노트

(Andrzej Wolski 교과서 13장 [1])

정모세

UNIST 물리학과

2023년 9월 19일

제 13 장

산란 효과

서론

제 12 장의 공간전하 효과에 대한 논의에서는, 빔 내부의 다른 모든 입자들에 의해 발생되는 전자기장이 개별 입자 운동에 영향을 미친다고 생각했다. 입자의 밀도가 큰 경우, 전자기장은 매끄러운 분포를 가진다고 취급할 수 있다. 특히 이 경우, 빔 내부 입자들의 점 전하적 성질에서 기인하는 전자기장 크기의 국소 변화는 무시하는 것이 가능하다. 하지만, 두 입자가 매우 짧은 거리 안으로 서로 접근하게 되면, 두 입자 사이의 상호작용은 연속적인 전하 분포를 가정해서 기술했을 때보다 훨씬 커질 수 있다. 이러한 상호작용은 흔히 충돌('collisions')이라고 일컫는다. 비록 이러한 충돌 현상이 공간전하 해석에서는 무시가 되었지만, 입자 쌍 사이의 충돌은 분명 빔 안에서 일어나고, 관찰가능한 효과를 야기한다. 두 입자 사이의 충돌은 각 입자의 운동량 변화를 야기하는 산란 과정으로 취급될 수 있다. 이러한 충돌에서부터 기인한 운동량의 변화는, 빔의 모든 입자들에 의해 집단적으로 발생되는 배경('background') 전자기장에 의한 변화보다 훨씬 클 수 있다.

빔 안에서 입자 사이의 충돌은 베타트론 및 싱크로트론 운동의 결과로 무작위로 일어나게 된다. 이러한 충돌의 확률은 입자의 밀도에 의존한다. 또한, 충돌로 부터 오는 운동량의 변화는 상호작용하는 입자들의 위치와 운동량에 의존한다. 일반적으로 큰 운동량의 변화를 가져오는 충돌은, 작은 운동량의 변화를 가져오는 충돌에 비해 드물게 일어난다. 작은 운동량의 변화를 가져오는 충돌이 상대적으로 자주 일어나는데, 이러한 충돌의 결과는, 빔으로부터 입자가 손실되는 것 없이, 서로 다른 자유도 사이의 운동량이 교환되는 것이다. 이 현상은 intrabeam 산란(*intrabeam scattering*)으로 알려져 있고, 13 장 2 절에서 논의된다. 큰 운동량의 변화를 가져오는 충돌은, 충돌에 관여한 입자들이 다같이 빔으로부터 손실되는 것을 야기한다. 저장링에서는 이러한 손실이 충돌후 입자의 에너지 편차가 저장링의 에너지 수용범위(억셉턴스, acceptance)를 벗어날 때 발생된다. 입자 사이의 충돌의 결과로 빔으로부

터 입자가 손실되는 현상은 Touschek 효과(*Touschek effect*)로 알려져 있다. [1] 13 장 1 절에서는 빔 안에서의 입자들 사이의 충돌에 대한 단순화된 모형을 기술할 것이다. 그리고, Touschek 효과에 의한 입자 손실률에 대한 공식을 유도하게 된다.

제 1 절 Touschek 효과

이번 절에서 우리의 목표는 저장링에서 빔으로부터 입자의 손실률에 대한 공식을 유도하는 것이다. 여기서 손실은 빔 안에서 입자들끼리의 충돌로부터 기인한다. 먼저, 번치의 정지 좌표계에서의 입자들을 고려하자. 모형을 단순화하기위해 우리는 분산(dispersion)의 효과를 무시하기로 한다. 그리고, 번치의 정지 좌표계에서 번치안의 입자들은 비상대론적으로 움직인다고 가정한다 (이러한 가정은 우리가 관심있는 모든 경우에서 정확하게 만족되지 않을 수 도 있다). 우리는 더 나아가 수직 방향 및 빔진행 방향으로의 입자 속도를 무시할 수 있다고 가정한다. 따라서, 우리는 수평 방향 운동만 고려하면 된다. 이러한 가정은 종종 'flat' 빔에 대해서는 합리적인 근사가 되는데, 전자 저장링에서 베타트론 결합이 매우 적을 때가 이 경우이다. 분산 및 결합의 효과를 포함한 보다 일반적인 공식도 유도가 되었는데, 이는 예를 들면, Piwinksi의 논문과 그 참고문헌들에 소개되어 있다. [2]

n_1 개의 점 입자들이 비슷한 입자들로 이루어진 표적에 입사하는 경우를 가정하자. 여기서 표적의 밀도(단위 체적당 입자수)는 ρ_2이다. 당분간은 충돌하는 입자들의 무게중심의 정지좌표계에서 문제를 다루기로 한다. n_1 개의 입자 샘플에서 표적안의 단위 이동거리당 입체각 Ω로 산란되어 들어가는 입자의 갯수는 다음과 같다.

$$\frac{dn_1}{dx} = \int_\Omega d\sigma\, n_1 \rho_2, \tag{13.1}$$

여기서, 두 점입자 (전자들 또는 양전자들) 사이의 산란에 대한 미분 단면적 σ은 Møller 산란 공식으로 주어진다.

$$d\sigma = \frac{4r_0^2}{(v/c)^4}\left(\frac{4}{\sin^4\theta} - \frac{3}{\sin^2\theta}\right) d\Omega. \tag{13.2}$$

여기서, $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$는 입체각의 미분소이고, r_0는 입자들의 고전 반경, 그리고 v는 입자들의 무게중심이 정지되어 있는 기준 좌표계에서 입자의 속도이다. θ는 입자들의 궤적이 편향되는 각도이다. 만일, 입자들이 초기에 x 좌표계와 나란히 이동을 하고 있다면, θ는 최종 입자 궤적의 x 좌표계에 대한 방위각이 된다 (그림 13.1 참조).

이제 (번치의 정지 좌표계에서) x 좌표계와 나란한 초기 운동량 P_x를 가지는 하나의 입자를 고려하자. 그리고 이 입자가 각도 θ로 산란된다고 하자. 산란 이후에 빔진행 방향 성분의 운동량은 $P_z = P_x \cos\psi$가 될 것이다. 여기서, ψ는 기준 궤적에 대한 입자 궤적의 각도이다. 만약, 번치의 정지 좌표계(즉,

[1] C. Bernadini et al., and B. Touschek, Lifetime and beam size in a storage ring, Physical Review Letters **10** (1946).

[2] A. Piwinski, The Touschek effect in strong focusing storage rings, Tech. Rep. DESY 98-179 (1998).

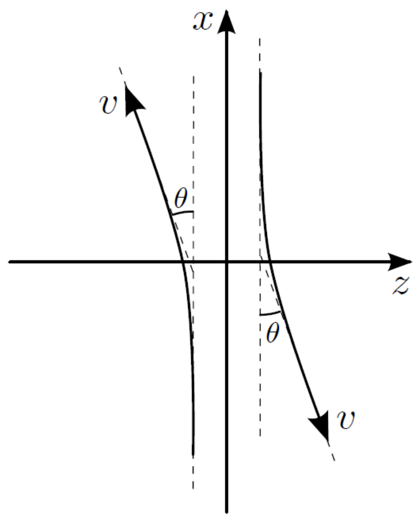

그림 13.1: 번치 안에서 두 입자 사이의 산란. 두 입자의 무게중심이 정지해 있는 좌표계에서, 입자들은 x 축과 나란한 방향으로 속도 v를 가진다. 산란 후에는 각각의 입자 궤적은 x 축에 대해 각도 θ를 이루게 된다. 이 산란 현상의 미분 단면적은 Møller 산란 공식 (13.2)로 주어진다.

기준 입자의 정지 좌표계)에서 산란된 입자가 비상대론적으로 움직인다면, 그 에너지는 mc^2에 가까울 것이다. (상대론적 인자 γ_0를 가지고) 로렌츠 부스트를 적용하면, 산란된 입자의 에너지는 실험실 좌표계에서 산란전에는

$$E_0 = \gamma_0 mc^2 \tag{13.3}$$

이고, 산란 후에는

$$E = \gamma_0 mc^2 + \beta_0\gamma_0 P_z c \tag{13.4}$$

이다. 따라서, 산란 과정은 입자가 에너지 편차를 가지도록 한다.

$$\delta = \frac{E}{P_0 c} - \frac{1}{\beta_0} = \frac{P_z}{mc}, \tag{13.5}$$

여기서 P_0는 기준 운동량이다. 횡단면 방향 운동량은 빔진행 방향으로의 로렌츠 부스트에 의해 변화하지 않는다. 따라서, 우리는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P_z = P_x \cos\psi = P_0 p_x \cos\psi = \beta_0\gamma_0 mcp_x \cos\psi, \tag{13.6}$$

여기서, p_x는 (산란 직전) 실험실 좌표계에서의 정준 운동량의 횡단면 방향 성분이다. 따라서, 산란 과정에서 수반되는 에너지 편차는

$$\delta = \beta_0\gamma_0 p_x \cos\psi. \tag{13.7}$$

이제 저장링이 에너지 억셉턴스 δ_{max}를 가진다고 가정하면, 에너지 편차의 절대값이 δ_{max} 보다 큰 값을 가지는 입자들은 빔으로부터 손실이 될 것이다. 아래의 조건을 만족하는 산란 과정은

$$|p_x \cos\psi| > \frac{\delta_{\text{max}}}{\beta_0\gamma_0} \tag{13.8}$$

산란에 관여된 두 입자들의 손실을 야기한다. 만약 우리가 이러한 산란의 발생률을 계산할 수 있다면, 어느 정도의 비율로 Touschek 산란에 의해 입자가 손실되는지도 계산할 수 있다. 첫 단계는 Touschek 산란의 전체 단면적을 찾는 것이다. 이것은 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma_T = \int_0^{\psi_{\text{max}}} \sin\psi\, d\psi \int_0^{2\pi} d\chi \frac{d\sigma}{d\Omega}, \tag{13.9}$$

여기서 ψ와 χ는 빔진행 방향 축에 대한 극각 및 방위각이다. ψ_{max}는 다음과 같이 정의되었다.

$$\cos\psi_{\text{max}} = \frac{\delta_{\text{max}}}{\beta_0\gamma_0 p_x}.K \tag{13.10}$$

임의의 벡터의 x 좌표계를 고려하면, 우리는 다음과 같이 서로 다른 극 좌표계의 각도들 사이에 관계식을 적을 수 있다.

$$\cos\theta = \sin\psi\cos\chi. \tag{13.11}$$

그러면, 식 (13.2)을 이용해서, 다음와 같이 전체 단면적을 얻는다.

$$\begin{aligned}\sigma_T &= \int_0^{\psi_{\text{max}}} \sin\psi d\psi \int_0^{2\pi} d\chi \\ &\quad \frac{4r_0^2}{(v/c)^4}\left(\frac{4}{(1-\sin^2\psi\cos^2\chi)^2} - \frac{3}{1-\sin^2\psi\cos^2\chi}\right).\end{aligned} \tag{13.12}$$

여기서 우리는 ψ에 대한 적분을 0에서부터 ψ_{max}까지만 수행했고, $\pi - \psi_{\text{max}}$에서 π까지는 수행하지 않았음을 주목하자. 후자의 범위도 물론 산란 과정에 참여한 입자들의 손실에 해당이 된다. 하지만, 이 경우는 이미 두번째 입자의 산란에 포함이 되어있다. 첫번째 입자와 두번째 입자는 서로 구별되지 않는다.

식 (13.12)의 적분은 계산이 가능하며, 그 결과는 다음과 같다.

$$\sigma_T(v) = \frac{4r_0^2}{(v/c)^4} 2\pi \left(\frac{1}{\mu^2} - 1 + \ln\mu\right), \tag{13.13}$$

여기서, μ는 다음과 같이 정의되었다.

$$\mu = \cos\psi_{\text{max}} = \frac{\delta_{\text{max}}}{\beta_0\gamma_0 p_x}. \tag{13.14}$$

식 (13.13)에 있는 속도 v는 충돌하는 입자들 사이의 (이들의 무게중심이 정지되어 있는 기준 좌표계에서의) 상대 속도임에 주목하자. 우리는 최종적으로 실험실 좌표계에서의 산란율을 계산하려고 한다. 즉, 두 충돌하는 입자의 질량중심이 그들의 상대 속도에 수직방향으로 $\beta_0 c$의 속도로 운동하는 좌표계이다. 이를 위해서 우리는 로렌츠 부스트를 산란 단면적에 적용을 해야한다. 이 과정은 약간의 주의가

필요하다. 밀도 (단위 체적당의 입자개수) ρ_2의 타겟에 상대속도 v로 입사하는 n_1 개의 입자 샘플을 고려하자. 식 (13.1)로부터, 샘플에 있는 입자 중에서 (충돌의 질량중심에서 측정되는) 시간 간격 dt 동안 산란되는 입자의 갯수는

$$dn_1 \; = \; v\sigma_T(v)n_1\rho_2 dt. \tag{13.15}$$

주어진 샘플의 입자 갯수는 좌표계에 상관없이 같기 때문에, 우리는 실험실 좌표계에서 산란되는 입자의 갯수가 다음과 같다고 할 수 있다.[3]

$$dn_1 \; = \; v'\sigma'_T(v')n_1\rho'_2 dt', \tag{13.16}$$

여기서, v'은 실험실 좌표계에서 충돌하는 입자들 사이의 상대 속도, ρ'_2은 실험실 좌표계에서 타겟에서의 입자 밀도, dt'은 실험실 좌표계에서의 시간 간격으로서 질량중심 좌표계의 dt에 해당된다. 그리고, $\sigma'_T(v')$은 실험실 좌표계에서의 충돌 단면적이다. 다음의 관계식을 이용하고,

$$v' = \frac{v}{\gamma_0}, \tag{13.17}$$

$$\rho' = \gamma_0\rho, \tag{13.18}$$

$$dt' = \gamma_0 dt, \tag{13.19}$$

식 (13.15)와 (13.16)를 비교하면, 아래와 같은 식이 성립됨을 볼 수 있다.

$$\sigma'_T(v') \; = \; \frac{\sigma_T(v)}{\gamma_0}. \tag{13.20}$$

최종적으로 식 (13.13)에서 볼 수 있는 단면적의 상대속도에 대한 의존성으로부터, 우리는 다음을 얻는다.

$$\sigma'_T(v') \; = \; \frac{\sigma_T(\gamma_0 v')}{\gamma_0} \; = \; \frac{\sigma_T(v')}{\gamma_0^5}. \tag{13.21}$$

이제 우리는 실험실 좌표계에서 빔 안의 입자수 N_b의 총 변화율을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dN_b}{dt} \; = \; -\frac{2}{\gamma_0^5}\int (v_{x2} - v_{x1})\sigma_T \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1)\Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2)\delta_{\mathrm{D}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2. \tag{13.22}$$

여기서, 모든 변수는 실험실 좌표계에서 측정이 되는 값들로서, 편의상 프라임($'$) 기호를 생략하였다. 그리고, $v_{x2} - v_{x1} = v$는 산란 과정에 참여한 두 입자들 간의 상대 속도, $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{p})$는 입자들의 위상 공간 밀도, $\sigma_T = \sigma_T(v_{x2} - v_{x1})$는 식 (13.13)에 의해 주어진다. 공간적으로 같은 위치에 있는 입자들끼리만 서로 산란이 발생하기에 디락 델타 함수 $\delta_{\mathrm{D}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$가 도입되었다. 인자 $1/\gamma_0^5$는 산란율을 번치의 정지 좌표계에서 실험실 좌표계로 로렌츠 변환하는 과정을 고려한 것이며, 식 (13.21)로부터 얻어졌다. 마지막으로, 적분식 (13.22) 앞에 있는 계수 2는 각각의 산란이 빔으로부터 두 개의 입자 손실을 가져옴을 고려한 것이다.

[3] n_1은 밀도가 아니라 갯수이다.

다음과 같은 Gaussian 분포를 가정하면, 위상 공간 밀도는 아래과 같이 쓸 수 있다.

$$\Psi(\mathbf{J},\phi) \;=\; \frac{N_b}{(2\pi)^3\epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z}e^{-\frac{J_x}{\epsilon_x}}e^{-\frac{J_y}{\epsilon_y}}e^{-\frac{J_z}{\epsilon_z}}, \tag{13.23}$$

여기서 $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_x)$와 $\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$는 각각 작용과 각 변수를 나타내고, ϵ_x, ϵ_y, 그리고 ϵ_z는 이미턴스이다. 작용 변수는 통상적인 관계식 (4.34)에 의해, 직각 좌표계의 변수로 표현될 수 있다.

$$J_x = \frac{1}{2}\left(\gamma_x x^2 + 2\alpha_x x p_x + \beta_x p_x^2\right)$$

그러고 나면, 좌표계 $\mathbf{x}_1$ 및 $\mathbf{x}_2$에 대한 적분, 그리고 수직 및 빔진행 방향으로의 결레 운동량에 대한 적분이 수행가능하고, 최종적으로 수평 방향 운동량 p_{x1} 및 p_{x2}에 대한 적분만 남게된다.

$$\begin{aligned}\frac{dN_b}{dt} \;&=\; -\frac{2}{\gamma_0^5}\frac{N_b^2}{16\pi^3}\frac{1}{\epsilon_x^2\sigma_y\sigma_x}\sqrt{\frac{\pi\epsilon_x}{\gamma_x}}\times\\ &\int (v_{x2}-v_{x1})\sigma_T \exp\left(\frac{\alpha_x^2(p_{x1}+p_{x2})^2}{4\gamma_x\epsilon_x}\right)\exp\left(-\frac{\beta_x(p_{x1}^2+p_{x2}^2)}{2\epsilon_x}\right)dp_{x1}dp_{x2}.\end{aligned} \tag{13.24}$$

여기서, α_x, β_x, 및 γ_x는 수평 방향으로의 Courant-Snyder 파라미터이다. 우리는 $\beta_x\gamma_x - \alpha_x^2 = 1$이라는 관계식을 이용하였다. 변수 $\sigma_y = \sqrt{\beta_y\epsilon_y}$ 및 $\sigma_z = \sqrt{\beta_z\epsilon_z}$는 수직 방향 빔 크기 그리고 빔진행 방향 번치 길이를 각각 나타낸다. 우리는 베타트론 커플링과 분산의 효과는 무시하였다.

p_{x1} 및 p_{x2}에 대한 적분은 여전히 남아 있는데, 이것은 속도 v_{x1} 및 v_{x2}가 다음과 같은 의존성을 가지고 있기 때문이다.

$$v_{x1} \approx cp_{x1}, \tag{13.25}$$

$$v_{x2} \approx cp_{x2}. \tag{13.26}$$

또한, $v = v_{x2} - v_{x1}$인데, 여기서 v는 단면적 σ_T의 표현식에 나타나는 상대속도이다. 계속해서 식을 계산하기 위해, 다음과 같은 새로운 변수를 정의하면,

$$\zeta = p_{x2} - p_{x1}, \tag{13.27}$$

손실율은 이 변수를 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{dN_b}{dt} \;&=\; -\frac{2}{\gamma_0^5}\frac{N_b^2 c}{16\pi^3}\frac{1}{\epsilon_x^2\sigma_y\sigma_z}\sqrt{\frac{\pi\epsilon_x}{\gamma_x}}\times\\ &\int_{-\infty}^{\infty}dp_{x1}\int_{\frac{2\delta_{\max}}{\beta_0\gamma_0}}^{\infty}d\zeta\sigma_T(\zeta)\zeta\exp\left(-\frac{p_{x1}^2+p_{x1}\zeta}{\gamma_x\epsilon_x}\right)\exp\left(-\frac{(1+\beta_x\gamma_x)\zeta^2}{4\gamma_x\epsilon_x}\right).\end{aligned} \tag{13.28}$$

단면적은 ζ의 함수이지, p_{x1}의 함수는 아닌데, 이것은 우리가 식 (13.13)에서 $v = \zeta c$로, 식 (13.14)에서 $p_x = \zeta/2$로 놓았기 때문이다. 명시적으로 표현하면,

$$\sigma_T(\zeta) \;=\; \frac{4r_0^2}{\zeta^4}2\pi\left(\frac{\beta_0^2\gamma_0^2\zeta^2}{4\delta_{\max}^2} - 1 + \ln\left(\frac{2\delta_{\max}}{\beta_0\gamma_0\zeta}\right)\right). \tag{13.29}$$

식 (13.28)의 ζ에 대한 적분식의 하한은 $\cos\psi_{\max} < 1$이라는 사실에서부터 왔고, 따라서 식 (13.14)에서부터,

$$\zeta > \frac{2\delta_{\max}}{\beta_0\gamma_0}. \tag{13.30}$$

물리적으로 ζ에 대한 하한이 의미하는 것은 입자들이 최소한의 횡단면 방향 운동량 이상을 가져야만, 산란 후에, 저장링의 억셉턴스보다 큰 에너지 편차를 가질 수 있다는 것이다.

σ_T는 p_{x1}에 의존하지 않기때문에, 식 (13.28)에 있는 p_{x1}에 대한 적분은 계산이 가능하다.

$$\frac{dN_b}{dt} = -\frac{2}{\gamma_0^5}\frac{N_b^2 c}{16\pi^2}\frac{1}{\epsilon_x\sigma_y\sigma_z}\int_{\frac{2\delta_{\max}}{\beta_0\gamma_0}}^{\infty}\sigma_T(\zeta)\zeta\exp\left(-\frac{\beta_x\zeta^2}{4\epsilon_x}\right)d\zeta. \tag{13.31}$$

마지막 단계는 적분 변수를 ζ에서 u로 바꾸는 것인데, u는 다음과 같이 주어진다.

$$u = \frac{\beta_x\zeta^2}{4\epsilon_x}. \tag{13.32}$$

또, 편의를 위해 우리는 다음의 파라미터를 정의한다.

$$\xi = \frac{\delta_{\max}^2\beta_x}{\beta_0^2\gamma_0^2\epsilon_x}. \tag{13.33}$$

그러고 나면, 빔으로부터 입자의 손실율은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\frac{dN_b}{dt} = -\frac{N_b^2\beta_0^3 c r_0^2}{8\pi\gamma_0^2\sigma_x\sigma_y\sigma_z\delta_{\max}^3}D(\xi), \tag{13.34}$$

여기서 함수 $D(\xi)$는 다음과 같이 주어진다.

$$D(\xi) = \xi^{3/2}\int_{\xi}^{\infty}\frac{e^{-2}}{u^2}\left(\frac{u}{\xi} - 1 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u}{\xi}\right)\right)du. \tag{13.35}$$

함수 $D(\xi)$는 그림 13.2에 그려져 있다.

식 (13.33), (13.34), 및 (13.35)는 Touschek 효과로 인한 입자 손실율을 나타내는 표준적인 표현식이다. 엄밀하게 말해서, 이 식들은 평탄한 Gaussian 빔에서만 적용이 되며, 커플링과 분산이 없어야 하고, 기준 입자의 정지 좌표계에서 입자의 운동이 비상대론적이어야 한다. 보다 일반적인 경우에 대한 손실율에 대한 식도 유도가 되었다. 예를 들어, Piwinski는 커플링과 분산 효과를 고려한 일반적인 표현식을 만들어 내었다.

Touschek 빔수명 τ_T는 보통 아래와 같이 정의된다.

$$\frac{1}{\tau_T} = -\frac{1}{N_b}\frac{dN_b}{dt} = \frac{N_b\beta_0^3 c r_0^2}{8\pi\gamma_0^2\sigma_x\sigma_y\sigma_z\delta_{\max}^3}D(\xi). \tag{13.36}$$

손실율 dN_b/dt가 입자 갯수의 제곱에 비례하기 때문에, 입자 갯수는 지수함수적으로 감소하지 않는다. 그럼에도 불구하고, 짧은 시간에 걸쳐서는 (N_b의 변화가 작기 때문에), τ_T가 번치 밀도 감쇠를 지수함수로 피팅하였을 때의 감쇠시간을 나타내게 된다. Touschek 효과로 인한 실제적인 번치 밀도의 감쇠는 다음과 같이 주어진다.

$$N_b(t) = \frac{N_b(0)}{1 + N_b(0)t/\bar{\tau}_T}, \tag{13.37}$$

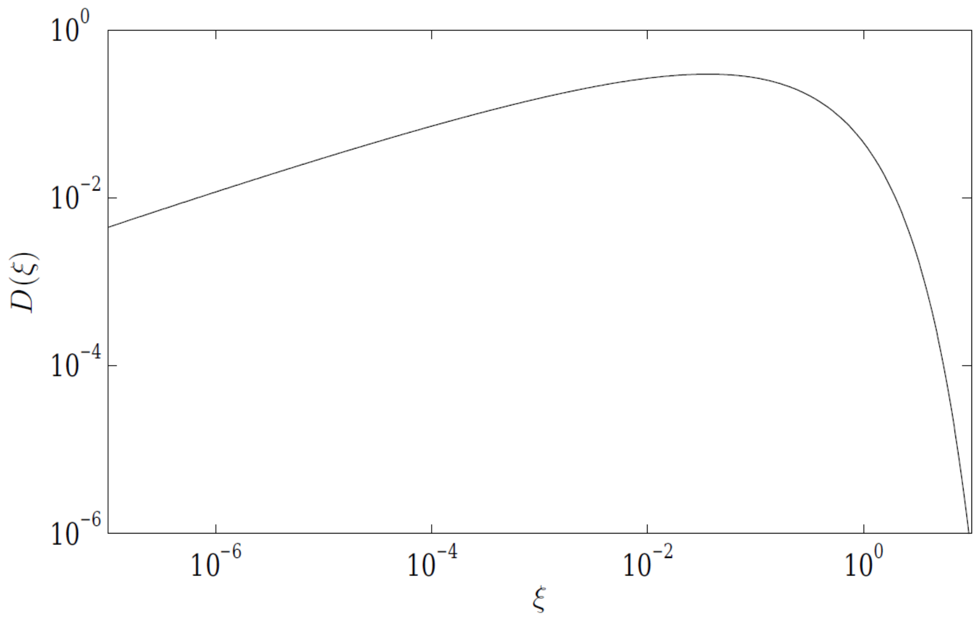

그림 13.2: 식 (13.35)로 주어진 Touschek 함수 $D(\xi)$.

여기서,

$$\frac{1}{\bar{\tau}_T} = -\frac{1}{N_b^2}\frac{dN_b}{dt} = \frac{\beta_0^3 c r_0^2}{8\pi\gamma_0^2\sigma_x\sigma_y\sigma_z\delta_{\max}^3}D(\xi). \tag{13.38}$$

실제로는, $\bar{\tau}_T$ 값보다는 특정한 번치 밀도 (또는 빔전류)에서의 Touschek 빔수명 τ_T를 언급하는 것이 보통이다.

3세대 방사광원의 전자링과 같은 저이미턴스 저장링에서는, 보통 Touschek 효과가 빔수명의 지배적인 한계가 된다. 보다 높은 이미턴스에서는 (또는 낮은 빔전류에서는), 다른 효과, 예를 들어 진공챔버안에서 잔류기체 분자에 의한 산란 효과가 빔수명에 상당한 영향을 미치게 된다. 하지만, 현대의 가속기에서 통상적으로 달성가능한 진공도 수준에서는, 잔류기체 산란에 의한 빔수명은 수십 시간 정도이고, 반면 Touschek 효과에 의한 빔수명은 수 시간 정도밖에 안된다. Touschek 효과는 따라서 저이미턴스 저장링을 운전하는데 있어서 상당히 중요하며, 디자인 단계에서부터 주의를 기울일 필요가 있다. 방사광원 사용자들은 종종 매우 안정된 빔 그리고 높은 휘도의 방사광을 아주 장시간 동안 필요로 한다. 따라서, 너무 짧은 Touschek 빔수명은 실험에 나쁜 영향을 미치게 된다. 사용자의 요구는 일반적으로 장치가 운전되는 빔에너지, 빔전류 (즉, 번치 밀도), 그리고 수평 및 수직 방향 빔크기를 결정한다. 그렇다면, Touschek 빔수명을 향상시키기 위해 조절이 가능한 빔 파라미터는 번치 길이와 에너지 억셉턴스이다. 번치 길이는 집속 격자의 운동량 컴팩션 인자 (momentum compaction factor)와 RF 파라미터 (즉, 주파수와 전압)에 의해서 결정된다. 운동량 컴팩션 인자는 대부분 격자의 종류 그리고 저장링의 크기에 의해 결정이 되나, 이중극자의 길이와 세기를 조정하여 운동량 컴팩션 인자를 증가시키는 융통성을 어느정도 줄 수도 있다. RF 주파수 그리고 RF 전압을 줄이면 번치 길이가 늘어날

것이다. 하지만, RF 전압을 줄이게 되면, RF 억셉턴스를 감소시키므로 (이것은 $\delta_{\max}$에 한계를 줄 수 있다.), 전압을 과도하게 줄이면 오히려 Touschek 빔수명을 감소시킨다.

저장링에서 Touschek 빔수명을 향상시키기 위한 가장 효과적인 방법은 에너지 억셉턴스 $\delta_{\max}$를 증가시키는 것이다. 저이미턴스 전자 (또는 양전자) 저장링의 통상적인 운전조건에서 함수 $D(\xi)$가 ξ에 대해 다소 약한 의존성을 가지고 있기 때문에, 식 (13.34)에서 보는 바와 같이, 빔수명은 $\delta_{\max}$에 매우 강한 의존성을 갖는다. $\delta_{\max}$에는 크게 두가지 요소가 기여한다. 하나는 RF 억셉턴스 δ_{rf}이고, 다른 하나는 동역학적 (dynamic) 에너지 억셉턴스 δ_{dyn}이다. 에너지 억셉턴스 $\delta_{\max}$는 식 (5.59)로 주어지는 RF 억셉턴스와 동역학적 에너지 억셉턴스 중에 작은 것에 해당한다.

$$\delta_{\mathrm{rf}} = \frac{2\nu_z}{h|\eta_p|}\sqrt{1 + \left(\phi_s - \frac{\pi}{2}\right)\tan\phi_s}$$

통상적으로 3세대 방사광원에서 사용되는 전자 저장링 형태에서는, RF 억셉턴스는 수 % 정도이다. 보통 이 값은 동역학적 에너지 억셉턴스보다 크며, 따라서, 동역학적 에너지 억셉턴스가 Touschek 빔수명을 제한하는 요소가 된다. 동역학적 에너지 억셉턴스는 집속 격자의 비선형성에 의해 결정이 되는데, 보통 육극자석의 효과가 지배적이지만 이극자석과 사극자석의 고차 다중극도 어느정도 기여를 한다. 비록 육극자석은 보통 1차의 색수차 (chromaticity) 효과가 0에 가깝게 조정이 되긴 하지만, 고차의 색수차 효과도 상당할 수 있다. 이때, 단지 몇 %의 에너지 편차를 가지는 입자의 베타트론 튠은 공명에 다다를 수 있고, 베타트론 운동을 불안정하게 한다.

운전중인 저장랑에서는 RF 전압의 함수로 Touschek 빔수명을 기록함으로써 동역학적 에너지 억셉턴스의 측정이 가능하다. RF 전압이 충분히 커서 에너지 억셉턴스 $\delta_{\max}$가 동역학적 에너지 억셉턴스에 의해 제한이 되는 동안에는, (주어진 빔전류에 대해) Touschek 빔수명은 RF 전압이 줄어듦에 따라 증가하는 경향을 나타낸다. 이것은 RF 전압을 감소시키는 것이 번치 길이를 증가시키고, 번치 내의 입자 밀도를 줄이기 때문이다. 하지만, RF 전압이 충분히 낮아서, RF 억셉턴스가 동역학적 에너지 억셉턴스를 제한하는 요소로 작용하기 시작하면, Touschek 빔수명은 전압이 감소함에 따라 떨어지게 된다. 만약 식 (5.59)의 δ_{rf}에 대한 공식의 여러 파라미터들이 알려져 있다면 (이런 경우가 대부분이다.), RF 억셉턴스를 RF 전압의 함수로 계산하는 것이 가능하다.

실제로는 동역학적 에너지 억셉턴스는 링 주위로의 위치의 함수이다. 이것은 입자의 에너지 편차를 변화시키는 산란 작용의 효과가 산란이 일어나는 지점에서의 격자 함수 (특히, 분산)에 의존하기 때문이다. 또한, 비선형 효과때문에, 에너지 억셉턴스가 비대칭일 수 있다. 즉, 계속되는 운동이 안정될 것인지의 여부가 에너지 편차의 변화가 (변화의 크기 뿐만 아니라) 양수인지 음수인지에 의존한다는 것이다. 장치 모델을 이용하여 Touschek 효과에 대한 정확한 해석을 위해서는, 격자의 에너지 억셉턴스에 대한 상세한 모델을 구축할 필요가 있다. 이러한 작업은 입자 트랙킹을 아주 많은 턴 수로 수행하는 것을 포함하며, 여러개의 다른 에너지 편차에서 시작하되 저장링 주위의 가급적 많은 지점들에서부터 하게된다. 이상적으로는 저장링 안의 물리적인 구경 (physical aperture)에 대한 정확한 기술도 이러한

모델에 포함이 되야한다. 트랙킹에서 싱크로트론 복사 감쇠 시간의 한두배 이상으로 살아남는 입자들은 트랙킹을 시작한 지점에서 에너지 억셉턴스 안에 있다고 생각할 수 있다. 이런식으로 에너지 억셉턴스에 대한 모델을 구축하는 것은 매우 계산비용이 많이 들지만, 종종 Touschek 빔수명에 대한 단순한 예측을 넘어서는 모델이 필요할 때가 있다.

격자의 에너지 억셉턴스를 최적화하는 일은 저장링의 디자인 단계에서나 또는 운전 단계에서 모두 다소 복잡한 일이다. 보통, 저장링을 건설하는 데는 수반되는 무작위의 오차들이 있는데, 이는 현실적으로 달성가능한 에너지 억셉턴스가 실제로는 모델에서 예상되는 것보다 작다는 (또는 아주 작다는) 것을 의미한다. 만약, 에너지 억셉턴스의 최적화 이후에, 여전히 Touschek 빔수명이 성능을 제한한다면, 다른 방법을 취할 수도 있다. 예를 들어, 고차 조화 RF파 시스템을 설치해서 빔이 보는 집속 포텐셜을 평평하게 할 수도 있다. 이렇게 하는 목적은 RF 억셉턴스의 감소 없이 번치 길이를 늘리는데 (또는 보다 일반적으로 말하면, 빔진행 방향 전하 분포의 모양을 바꾸어서 평균 밀도를 낮추는데) 있다. 또 다른 가능성은 탑-업 입사 (top-up injection) 시스템을 이용하는 것인데, 여기서는 빔전류가 상당한 정도로 감소하기 전에, 적은 양의 전하를 링에 주기적으로 입사하게 된다. 고차 조화 RF파 시스템 또는 탑-업 입사 시스템을 설치 및 운전하는 것은 단순한 일이 아니며, 장치 가격이나 인력 측면에서 비용이 상당할 수 있다. 그럼에도 불구하고, 꽤 많은 장치들에서 이런 종류의 시스템을 성공적으로 운영하고 있다.

제 2 절 Intrabeam 산란

13장 1절에서 우리는 Touschek 효과를 논의했고, 이것은 입자들 사이의 산란의 결과로 가속기 안의 빔으로부터 입자들이 손실되는 것이라는 것을 보았다. 입자의 손실율은 입자가 링의 에너지 억셉턴스보다 큰 에너지 편차를 가지도록 하는 산란이 일어날 확률에 의존한다. 입자 손실이 일어나도록 하는 산란의 경우는 상대적으로 흔하지가 않다. 3세대 방사광원에서 사용되는 전자 저장링 형태에서는 Touschek 빔수명이 서너 시간 정도이다. 하지만, Møller 산란 공식 (13.2)에서 보는 것과 같이, 단면적은 편향각이 줄어듦에 따라 급격하게 증가한다. 다른 말로 하면, 작은 각도의 산란이 큰 각도의 산란보다 훨씬 발생할 가능성이 많다는 것이다. 비록 작은 각도의 산란은 빔 손실을 가져다 주지는 않지만, 입자의 운동량을 서로 다른 자유도 사이에 전달함으로써 빔에 영향을 미칠 수 있다. 실제로 이런 과정은 빔의 에너지 퍼짐을 증가시키게 된다. 만약 산란이 수평 (또는 수직) 분산이 있는 곳에서 발생하면, 수평 (또는 수직) 방향 이미턴스의 증가가 또한 있게되는데, 이것은 분산이 있는 곳에서 광자가 방출되는 경우 횡단면 방향 이미턴스의 양자 들뜸이 발생하는 것과 같은 원리이다. 작은 각도의 산란에 의해 빔진행 방향 및 횡단면 방향 이미턴스가 증가하는 것을 다중 Touschek 효과라 종종 부르기도 하고, 또한 intrabeam 산란 (*intrabeam sacttering*)이라고 알려져 있다.

Intrabeam 산란(IBS)에 대한 최초의 상세한 해석은 Piwinski에 의해 이루어지는데, 그는 저장링에

서 운전을 below transition으로 하느냐 아니면 above transition으로 하느냐에 따라 산란이 매우 다른 거동을 야기함을 보였다. Below transition에서는 빔 안에서 입자들끼리의 작은 각도의 산란은 기체 안에서의 입자들끼리의 충돌과 유사하다. 기체의 경우 입자들 사이의 충돌은 서로 다른 자유도 사이에 균등하게 에너지가 분배되도록 한다. 만약 어떤 특정한 자유도(예를 들어, 수평, 수직, 또는 빔진행 방향 운동)에 해당되는 에너지의 분포가 온도에 의해 특성지워진다면, 초기에 한 자유도에 대해 높은 온도를 가진 기체는, 입자들 사이의 충돌을 통하여, 어떤 평형 상태에 이르러 모든 자유도에 대해 같은 온도를 가지게 될 것이다. 이와 유사하게, below transition으로 운전되는 저장링에서는 IBS가 어떤 평형 상태에 이르도록 하며 번치 내 입자의 분포가 각 자유도에 대해 동일한 '온도'로 특성지워지게 된다. 이러한 것은 양성자 저장링에서 가장 확연하고, 여기서는 상크로트론 복사의 효과는 무시할만 하다. 전자 저장링에서는 (보통 above transition으로 운전이 된다.) 상크로트론 복사의 효과가 IBS 효과에 대해 지배적이어서, 번치 안의 입자 밀도가 아주 높을 때만 IBS의 효과가 중요하게 된다.

Above transition으로 운전되는 저장링에서는 빔진행 방향으로의 동역학이 below transition일 때의 동역학과 매우 달라지게 된다. 특히, 에너지의 증가는 빔진행 방향 속도의 실질적 감소를 의미한다. (즉, 회전 주파수가 감소한다.) 이 경우 기체 안에서의 입자와의 유사성은 더 이상 유효하지 않게된다. Above transition에서는 IBS가 빔분포의 평형을 이루게하지 못하고, 대신 수평, 수직 및 빔진행 방향의 이미턴스가 무한히 증가하게 되는데, 진폭을 증가시키는 에너지는 RF 시스템으로부터 제공이 된다.

IBS의 가장 주요한 효과는 빔 이미턴스에 어느 정도 변화를 가져오는 것이다. IBS 이론의 가장 핵심적인 결과들은 각각의 자유도에 대해 증가율을 주는 공식들이다. IBS 증가율은 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{1}{T_i} = \frac{1}{\epsilon_i^{1/2}} \frac{d\epsilon_i^{1/2}}{dt} = \frac{1}{2\epsilon_i} \frac{d\epsilon_i}{dt}, \tag{13.39}$$

여기서, $i = x, y$, 또는 z이고, T_x, T_y 및 T_z는 각각 수평, 수직, 그리고 빔진행 방향 IBS 증가 시간을 나타낸다. 그리고, ϵ_x, ϵ_y 및 ϵ_z는 각각 수평, 수직, 그리고 빔진행 방향 이미턴스이다. 빔진행 방향과 횡단면 방향 평면 사이의 커플링을 무시하면, 상대적인 에너지 퍼짐 σ_δ는 빔진행 방향 이미턴스와 다음과 같이 관계된다.

$$\sigma_\delta^2 = \gamma_z \epsilon_z, \tag{13.40}$$

여기서 γ_z는 빔진행 방향 Courant-Snyder gamma 함수이다. Courant-Snyder 파라미터가 시간에 대해 일정하다고 가정하면, 빔진행 방향 증가율은 (좀더 관례적인 형태로) 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{T_z} = \frac{1}{\sigma_\delta} \frac{d\sigma_\delta}{dt}. \tag{13.41}$$

IBS에 대한 수학적인 해석은 상당히 복잡해서 실제 활용이 가능한 결과를 얻기위해서는 약간의 근사가 필요하다. 상세한 유도를 위해서는 독자들은 다음에 나오는 참고문헌을 보기 바라고, 우리는 단순히 주요 결과만 소개하고, 서로 다른 연구자들이 유도한 공식들 사이에 관계만 논의하고자 한다. 많은

연구자들이 오랜 시간에 걸쳐서 이론 정립에 기여를 해왔는데, 가장 주목할만한 연구는 Piwinski[4], 그리고 Bjorken과 Mtingwa[5]에 의해서 이루어졌다. Kubo와 Oide[6]는 Bjorken과 Mtingwa의 연구에 바탕을 두고 공식을 개발하였지만, 형태를 7.4절에서 논의한 싱크로트론 복사 효과와 유사한 형태로 만들었다. 싱트로트론 복사와 비교해서, IBS의 경우에 추가적인 복잡성이 나타나는데, 그것은 산란율이 번치의 크기에 의존한다는 것이고, 이런 의존성은 싱크로트론 복사 효과에는 없는 것이다. 이것은 전자 가속기에서 IBS가 있는 경우에 평형상태의 이미턴스를 구하기 위해서는 적절한 반복 계산이 필요하다는 것이다. (양성자 가속기에서는, 물론, 싱크로트론 복사 효과가 보통 무시될 수 있기때문에, 일반적으로 최종 목표는 단지 IBS 증가율을 어떤 주어진 이미턴스에 대해 계산하는 것이다.) 그럼에도 불구하고, Kubo와 Oide의 연구는 베타트론 커플링 또는 수직 분산 등의 효과가 있는 경우에 IBS의 영향을 계산하는데 편리한 접근법을 제공한다.

2.1 Piwinski 공식

Gaussian 빔분포를 가정하여, 싱크로트론 저장링에서 IBS의 증가율에 대한 Piwinski의 공식은 다음과 같다.

$$\frac{1}{T_x} = A\left\langle f\left(\frac{1}{\tilde{a}},\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}},\frac{\tilde{q}}{\tilde{a}}\right) + \frac{\eta_x^2\sigma_h^2}{\beta_x\epsilon_x} f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{q})\right\rangle, \tag{13.42}$$

$$\frac{1}{T_y} = A\left\langle f\left(\frac{1}{\tilde{b}},\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}},\frac{\tilde{q}}{\tilde{b}}\right) + \frac{\eta_y^2\sigma_h^2}{\beta_y\epsilon_y} f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{q})\right\rangle, \tag{13.43}$$

$$\frac{1}{T_z} = A\left\langle \frac{\sigma_h^2}{\sigma_\delta^2} f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{q})\right\rangle, \tag{13.44}$$

여기서,

$$A = \frac{\pi r_0^2 c N_b}{8\gamma_0\Gamma}, \tag{13.45}$$

$$\frac{1}{\sigma_h^2} = \frac{1}{\sigma_\delta^2} + \frac{\eta_x^2}{\beta_x\epsilon_x} + \frac{\eta_y^2}{\beta_y\epsilon_y}, \tag{13.46}$$

$$\tilde{a} = \frac{\sigma_h}{\gamma_0}\sqrt{\frac{\beta_x}{\epsilon_x}}, \tag{13.47}$$

$$\tilde{b} = \frac{\sigma_h}{\gamma_0}\sqrt{\frac{\beta_y}{\epsilon_y}}, \tag{13.48}$$

$$\tilde{q} = \beta_0\sigma_h\sqrt{\frac{2d}{r_0}}. \tag{13.49}$$

[4] A. Piwinski, Intra-beam scattering, in Proceedings of the 9th International Conference on High Energy Accelerators (1974).

[5] J. D. Bjorken and S. K. Mtingwa, Intrabeam scattering, Particle Accelerators **13** (1983).

[6] K. Kubo and K. Oide, Intrabeam scattering in electron storage rings, Physical Review Accelerators and Beams **4** (2001).

함수 f는 다음과 같이 주어진다.

$$f(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{q}) \;=\; 8\pi \int_0^1 (\log)_{\mathrm{P}} \frac{1-3u^2}{\tilde{P}\tilde{Q}} du, \tag{13.50}$$

여기서,

$$(\log)_{\mathrm{P}} = 2\ln\left(\frac{\tilde{q}}{2}\left(\frac{1}{\tilde{P}}+\frac{1}{\tilde{Q}}\right)\right) - 0.577..., \tag{13.51}$$

$$\tilde{P}^2 = \tilde{a}^2 + (1-\tilde{a}^2)u^2, \tag{13.52}$$

$$\tilde{Q}^2 = \tilde{b}^2 + (1-\tilde{b}^2)u^2. \tag{13.53}$$

위의 공식들에 나타나는 여러 변수들은 다음과 같이 정의된다. $\beta_x(\beta_y)$는 수평(수직) 방향 베타함수; $\eta_x(\eta_y)$는 수평(수직) 방향 분산; σ_δ는 rms 에너지 편차, 그리고 σ_z는 rms 번치 길이; N_b는 번치 내의 입자 갯수; γ_0는 상대론적 인자; r_0는 전하 q 및 질량 m을 가지는 입자의 고전 반경;

$$r_0 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}. \tag{13.54}$$

Γ는 번치의 정규화된 위상 공간 부피로서, 다음과 같이 주어진다.

$$\Gamma \;=\; \prod_{i=x,y,z} \int_0^{2\pi} d\phi_i \int_0^{\infty} dJ_i\, \beta_0\gamma_0 e^{-J_i/\epsilon_i} \;= 8\pi^3\beta_0^3\gamma_0^3\epsilon_x\epsilon_y\epsilon_z. \tag{13.55}$$

$\beta_0 = v/c$ 이고 (식 (13.49)에도 나타남), 여기서 v는 기준 입자의 속도이다. 따라서, $\beta_0\gamma_0\epsilon_i$ $(i = x, y, z)$는 정규화된 (수평, 수직, 그리고 빔진행 방향) 이미턴스이다. 파라미터 d는 두 입자 사이의 충돌에서 최대 충격 변수(impact parameter)인데, 보통 수평 및 수직 빔 크기에서 작은 값으로 취한다. 괄호 $\langle\rangle$는 저장링의 둘레 주변으로의 평균을 의미한다.

식 (13.44)의 빔진행 방향 증가율은 하나의 항만 포함을 하는 반면, 식 (13.42) 및 (13.43)의 수평 및 수직 방향 증가율에는 두 항이 존재한다. 여기서 두번째 항들은 모두 빔진행 방향 증가율과 분산(의 제곱)에 비례한다. 식 (13.42) 및 (13.43)의 첫번째 항은 각각 수평 및 수직 방향으로의 직접적인 이미턴스의 들뜸을 나타낸다. 반면 두번째 항은 빔진행 방향의 이미턴스 증가가 수평 또는 수직 평면으로 커플링되는 것으로 해석할 수 있다. 이 물리적 기작은 싱크로트론 복사에 의한 수평 및 수직 베타트론 운동의 양자 들뜸과 유사하다. 복사가 입자운동의 순간 속도 방향으로 방출된다는 가정하에서, 분산이 없는 경우에는 복사에 의한 베타트론 운동의 들뜸은 없다. 하지만, 입자가 분산이 0이 아닌 지점에서 복사에 의해 에너지를 잃는 경우에 입자는 새로운 off-energy 닫힌 궤도를 기준으로 횡단면 방향의 위치(그리고 운동량)의 변화를 느끼게 되고, 이것은 베타트론 진폭의 변화로 기술될 수 있다. 이와 비슷하게, 분산이 0이 아닌 지점에서 다른 입자와의 산란에 의한 입자의 에너지 변화는 베타트론 운동의 들뜸을 야기한다. 물론, 여기서는 운동량의 변화가 서로 다른 자유도로 전환되는 것과 관련된 베타트론 진폭의 변화도 있다. 이 효과는 분산에 무관하며, 식 (13.42) 및 (13.43) 우변의 표현식에서 첫번째 항들로 기술된다.

싱크로트론 복사에 의한 양자 들뜸과 IBS에 의한 이미턴스 증가의 유사성은 Bane으로 하여금, Piwinski 공식의 수정을 제안토록했는데, 여기서는 η_x^2/β_x 항이 식 (7.74)으로 주어진 분산 불변량인 $\mathcal{H}_x$ 함수로 대체된다.

$$\mathcal{H}_x = \gamma_x\eta_x^2 + 2\alpha_x\eta_x\eta_{px} + \beta_x\eta_{px}^2, \tag{13.56}$$

그리고, η_y^2/β_y 값도 $\mathcal{H}_y$로 (위의 $\mathcal{H}_x$와 비슷하게 정의되어) 대체된다. 이러한 치환은 분산이 나타날 때마다 이루어 진다. 예를 들면, 식 (13.42), (13.43) 및 (13.46) 등에서다. Piwinski 공식에 이러한 수정이 타당한 이유는 입자의 에너지 변화로부터 오는 수평 (수직) 방향 베타트론 작용의 변화가 $\mathcal{H}_x(\mathcal{H}_y)$에 의해 결정되기 때문이다. 에너지 변화의 결과로 베타트론 작용의 증가를 가져오는 기작은, IBS의 경우나 싱크로트론 복사에 의한 양자 들뜸이나 서로 같다. 따라서, 베타트론 작용의 변화는 이 두 경우에 있어서 같은 물리량으로 기술되야 한다. 이렇게 수정된 Piwinski 공식에서는 증가율이 분산의 구배(즉, η_{px} 및 η_{py})에 의존하게 되는데, 이러한 성질은 기존의 Piwinski 공식에서는 나타나지 않던 것이다.

함수 f는 다음을 만족한다.

$$f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{q}) + \frac{1}{\tilde{a}^2}f\left(\frac{1}{\tilde{a}},\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}},\frac{\tilde{q}}{\tilde{a}}\right) + \frac{1}{\tilde{b}^2}f\left(\frac{1}{\tilde{b}},\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}},\frac{\tilde{q}}{\tilde{b}}\right) = 0. \tag{13.57}$$

이 성질을 이용하면, 식 (13.42), (13.43) 및 (13.44)로부터, IBS가 존재하는 경우 (그리고, 이미턴스를 변화시키는 싱트로트론 복사와 그밖의 다른 효과는 무시하면) 빔 이미턴스들이 다음의 관계식을 만족함을 보일 수 있다.

$$\left(\frac{1}{\gamma_0^2} - \left\langle\frac{\eta_x^2}{\beta_x^2}\right\rangle - \left\langle\frac{\eta_y^2}{\beta_y^2}\right\rangle\right)\epsilon_z + \left\langle\frac{1}{\beta_x}\right\rangle\epsilon_x + \left\langle\frac{1}{\beta_y}\right\rangle\epsilon_y = \text{constant}. \tag{13.58}$$

만약, 식 (13.58)에 있는 ϵ_z 앞의 계수가 양수라면, 식 (13.58)의 우변에 있는 각 항들은 모두 양수가 된다. 이러한 경우에는 IBS의 결과로 다다를 수 있는 이미턴스 값에 상한이 존재하게 된다. 이것은 빔이 어떤 평형상태에 다다를 수 있음을 의미한다. 하지만, 만약 식 (13.58)의 ϵ_z 앞의 계수가 음수라면, 빔진행 방향 이미턴스 그리고 횡단면 방향 이미턴스의 하나 또는 모두는 무한히 증가할 수 있게 된다.

IBS에 의한 이미턴스 증가가 상한을 가질지 말지는 저장링의 운전이 below transition 인지 above transition 인지에 의존한다. 우리는 이런 사실을 FODO 저장링에 대해 다음과 같이 보일 수 있다. 먼저, 식 (7.104)와 (7.105)를 이용하여, 우리는 첨두 베타함수와 분산이 FODO 저장링에서 다음을 만족함을 알수 있다.

$$\frac{\beta_x^2}{\eta_x} = \frac{2f\rho(2f + \rho\tan\theta)}{(2f+\rho\tan(\theta/2))(2f-\rho\tan\theta)}, \tag{13.59}$$

여기서, f는 사극자석의 초점 거리, ρ는 이극자석들의 휨 반경, 그리고 θ는 하나의 이극자석에 대한 휨 각도이다. 많은 FODO 격자셀로 이루어진 링에서는, 우리는 식 (13.59)의 우변을 θ에 대한 급수로 전개할 수 있다.

$$\frac{\beta_x^2}{\rho\eta_x} = 1 + \frac{3\rho}{4f}\theta + O(\theta^2). \tag{13.60}$$

θ에 대한 1차항(그리고, 이후의 고차항)을 무시하면,

$$\frac{\eta_x^2}{\beta_x^2} \approx \frac{\eta_x}{\rho}. \tag{13.61}$$

따라서, 식 (5.20)의 운동량 컴팩션 인자는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\alpha_p = \left\langle \frac{\eta_x}{\rho} \right\rangle \approx \left\langle \frac{\eta_x^2}{\beta_x^2} \right\rangle. \tag{13.62}$$

최종적으로, 수직방향 분산을 무시하면 (일반적인 동일평면에 놓인 저장링에서는 설계값이 0이다.), 식 (13.58)의 ϵ_z의 계수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{\gamma_0^2} - \left\langle \frac{\eta_x^2}{\beta_x^2} \right\rangle \approx \frac{1}{\gamma_0^2} - \alpha_p = -\eta_p, \tag{13.63}$$

여기서 η_p는 위상 미끄럼 인자이고, 우리는 식 (5.30)을 사용하였다. Below transition에서는, 위상 미끄럼 인자는 (정의에 의해) 음수이다. 따라서, 식 (13.58)의 ϵ_z의 계수는 양수가 될 것이고, IBS 이미턴스 증가에는 상한이 존재할 것이다. Above transition에서는 (즉, 충분히 높은 빔에너지에서), 위상 미끄럼 인자는 양수가 될 것이고, 식 (13.58)의 ϵ_z의 계수는 양수가 되고, 이미턴스는 (원칙적으로) IBS의 결과로 무한히 증가할 수 있게된다.

고에너지 전자 저장링은 상대론적 인자 γ_0가 커서 보통 above transition으로 운전이 된다. IBS는 어느 정도의 이미턴스 증가를 야기하겠지만, 이 효과는 싱크로트론 복사에 의한 감쇠로 인해 완화된다. 양자 들뜸, 싱크로트론 복사에 의한 감쇠, 그리고 IBS를 모두 고려하면, 전자 저장링에서의 이미턴스는 다음과 같이 전개되어 간다.

$$\frac{d\epsilon_i}{dt} = \frac{2}{\tau_i}(\epsilon_{i0} - \epsilon_i) + \frac{2}{T_i}\epsilon_i, \tag{13.64}$$

여기서, τ_i는 싱크로트론 복사에 의한 감쇠 시간, T_i는 IBS 증가 시간, 그리고 ϵ_{i0}는 IBS가 없는 상황에서의 평형 이미턴스(즉, 평형 이미턴스가 양자 들뜸과 싱크로트론 복사에 의한 감쇠에 의해서 결정)이다. 만약, ϵ_{i1}가 IBS가 고려된 평형 이미턴스라고 하면,

$$\frac{2}{\tau_i}(\epsilon_{i0} - \epsilon_i) + \frac{2}{T_i}\epsilon_i = 0, \tag{13.65}$$

이고, 따라서

$$\epsilon_{i1} = \frac{\epsilon_{i0}}{1 - \tau_i/T_i}. \tag{13.66}$$

IBS 증가 시간 T_i는 빔 이미턴스의 함수이기 때문에, IBS가 있는 상황에서 평형 이미턴스를 찾기위해서는 식 (13.66)을 풀기위해 반복계산법을 사용할 필요가 있다. IBS는 보통 전자 저장링에서 그렇게 심하지는 않다. 보통 달성되는 이미턴스와 번치 전하 수준에서, IBS에 의한 이미턴스 증가 시간은 싱크로트론 복사에 의한 감쇠시간에 비해 길다. 초저 수직 이미턴스(아마도 수 피코미터)로 운전되는 저장링에서는 IBS 증가 시간이 충분이 짧아서 평형 이미턴스에 가시적인 효과를 줄 수 있다. 극단적인 경우에는 이론적으로 IBS 증가 시간이 싱크로트론 복사에 의한 감쇠시간보다 짧을 수도 있다. 식

(13.66)은 이런 경우 평형 이미턴스에 대해 음수값을 주게된다. 하지만, IBS 증가 시간은 이미턴스에 의존성이 있기 때문에, 실제로는 IBS 증가 시간이 복사에 의한 감쇠시간보다 짧을 때까지는 이미턴스가 단순히 증가하게 된다. 식 (13.66)은 평형상태에만 적용이 되고, IBS 증가 시간이 복사에 의한 감쇠시간보다 짧을 때는 평형상태가 존재할 수 없음을 알려준다.

2.2 Bjorken-Mtingwa 공식

Bjorken과 Mtingwa는 IBS 증가율에 대한 공식을 Pwinski와는 다른 접근법을 사용하여 다음과 같이 얻었다.

$$\frac{1}{T_i} = 4\pi A(\log)_{\mathrm{BM}} \times \left\langle \int_0^\infty d\lambda \sqrt{\frac{\lambda}{\det\left(L+\lambda I\right)}} \left[\mathrm{Tr}(L_i)\,\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{L+\lambda I}\right) - 3\mathrm{Tr}\left(\frac{L_i}{L+\lambda I}\right)\right]\right\rangle, \tag{13.67}$$

여기서 A는 식 (13.45)에 의해 주어지고, I는 단위 행렬, 그리고 행렬 L_i는 다음과 같이 주어진다.

$$L_x = \frac{\gamma_0\sqrt{\beta_x\mathcal{H}_x}}{\epsilon_x}\begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_0}\sqrt{\frac{\beta_x}{\mathcal{H}_x}} & \sin\varphi_x & 0 \\ \sin\varphi_x & \gamma_0\sqrt{\frac{\mathcal{H}_x}{\beta_x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13.68}$$

$$L_y = \frac{\gamma_0\sqrt{\beta_y\mathcal{H}_y}}{\epsilon_y}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_0\sqrt{\frac{\mathcal{H}_y}{\beta_y}} & \sin\varphi_y \\ 0 & \sin\varphi_y & \frac{1}{\gamma_0}\sqrt{\frac{\beta_y}{\mathcal{H}_y}} \end{pmatrix}, \tag{13.69}$$

$$L_z = \frac{\gamma_0^2}{\sigma_\delta^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13.70}$$

그리고, L은 다음과 같이 정의된다.

$$L = L_x + L_y + L_z. \tag{13.71}$$

$\mathcal{H}_x$는 분산 불변량 식(7.74)이다.

$$\mathcal{H}_x = \gamma_x\eta_x^2 + 2\alpha_x\eta_x\eta_{px} + \beta_x\eta_{px}^2, \tag{13.72}$$

그리고, $\mathcal{H}_y$에 대해서도 비슷한 형태로 식을 쓸 수 있다. 함수 φ_x는 다음과 같이 정의된다.

$$\tan\varphi_x = -\beta_x\frac{\eta_{px}}{\eta_x} - \alpha_x, \tag{13.73}$$

그리고, $\tan\varphi_x$에 대해서도 비슷한 형태로 식을 쓸 수 있다. 물리량 $\mathcal{H}_x$와 $\tan\varphi_x$의 물리적 의미는 다음과 같이 이해될 수 있다. 만일 우리가 식 (13.72) 및 (13.73)을 식 (4.34)의 작용 J_x 그리고 식 (4.35)의 각 ϕ_x와 비교하고, 또한 분산항 $\eta_x\delta$가 에너지 편차 δ를 가지는 입자의 궤적을 준다는 것에 주목하면, 식 (4.36) 및 (4.37)로부터 다음을 유추할 수 있다.

$$\eta_x = \sqrt{\beta_x \mathcal{H}_x}\cos\varphi_x, \tag{13.74}$$

$$\eta_{px} = -\sqrt{\frac{\mathcal{H}_x}{\beta_x}}(\sin\varphi_x + \alpha_x\cos\varphi_x). \tag{13.75}$$

즉, $\mathcal{H}_x$는 수평 방향 분산의 '진폭'을 나타내고, φ_x는 수평 방향 분산의 '위상'을 나타낸다.

물리량 $(\log)_{\mathrm{BM}}$는 종종 쿨롬 로그(*Coulomb log*)라 알려져 있으며, 다음과 같이 정의된다.

$$(\log)_{\mathrm{BM}} = \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right), \tag{13.76}$$

여기서, $b_{\max}$는 빔 내부의 두 입자 사이의 충돌 중에 일어날 수 있는 최대 충격 파라미터이고, $b_{\min}$는 충돌 중에 일어날 수 있는 최소 충격 파라미터이다. 이러한 파라미터들의 값은 종종 다음과 같이 택할 수 있다.

$$b_{\max} = d, \tag{13.77}$$

$$b_{\min} = r_0, \tag{13.78}$$

여기서, d는 수평과 수직 빔 크기 중에 작은 값이고, r_0는 입자의 고전 반경이다.

IBS 증가율에 대한 표현식인 Bjorken-Mtingwa 공식 (13.67)은 식 (13.42), (13.43) 및 (13.44)로 주어진 Piwinski 공식의 IBS 증가율에 대한 표현식과 매우 달라 보이는 형태를 가지고 있다. 하지만, Bane은, 적절한 가정을 통해, Piwinski 공식과 Bjorken-Mtingwa 공식이 서로 잘 일치함을 보였다. 이와 관련된 논의는 다음절에서 다루기로 할텐데, 우리는 IBS 증가율에 대한 표현식들이 높은 에너지의 빔에 대해 계산이 단순화되는 근사들을 고려하게 된다.

2.3 고에너지 근사

공식 (13.42)–(13.44), 그리고 공식 (13.67)은 IBS에 의한 이미턴스 증가의 비율에 대한 표현을 제공하며, 만약 여러 격자 및 빔에 대한 파라미터가 알려지면 계산되어 질 수 있다. 하지만, 계산과정은 공식들에 나타나는 적분들을 수행하는 단계와 그 결과들을 전체 저장링 둘레에 대해 평균을 내는 단계를 포함한다. 이러한 과정은 수치계산의 비용이 높으며, 따라서 좀더 쉽고 빠르게 적용될 수 있는 단순화된 (비록 근사적이라고 할지라도) 공식을 사용하는 것이 유용한 경우가 많다. 고에너지의 경우 여러 근사방법이 제시되었는데, 그 중 주목할 것은 Bane에 의한 방법, 그리고 Kubo 등에 의한 방법이다. 한 가지 가능한 방법은 다음과 같다.

Bjorken-Mtingwa 공식 (13.67)에서 $i = z$일 때 주어지는 빔진행 방향 이미턴스 증가율에서부터 논의를 시작하기로 하자. 행렬 L의 비대각 원소는 그 값의 범위가 -1에서 1임을 주목하자. 하지만, 대각 원소는 1 보다 훨씬 커질 수도 있다. 이것은 특히 고에너지의 경우에서 그러하다. 우리는 L의 비대각 원소를 대각 원소에 비해 무시할만하다고 가정할 수 있고, 따라서 L은 다음과 같이 근사된다.

$$L = \frac{\gamma_0^2}{\sigma_\delta^2} \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}, \tag{13.79}$$

여기서,

$$a = \frac{\sigma_H}{\gamma_0} \sqrt{\frac{\beta_x}{\epsilon_x}}, \tag{13.80}$$

$$b = \frac{\sigma_H}{\gamma_0} \sqrt{\frac{\beta_y}{\epsilon_y}}, \tag{13.81}$$

그리고,

$$\frac{1}{\sigma_H^2} = \frac{1}{\sigma_\delta^2} + \frac{\mathcal{H}_x}{\epsilon_x} + \frac{\mathcal{H}_y}{\epsilon_y}. \tag{13.82}$$

여기서, σ_H, a, 그리고 b는 Piwinski 공식 (13.46), (13.47) 및 (13.48)에 정의된 물리량 σ_h, $\tilde{a}$, 및 $\tilde{b}$에 해당되며, 단지 Bane의 공식 수정에 따라 $\eta_x^2/\beta_x(\eta_y^2/\beta_y)$가 $\mathcal{H}_x(\mathcal{H}_y)$로 치환되었다. 몇가지 대수적인 계산을 하고 나면, 우리는 빔진행 방향 증가율 식 (13.67)이 다음과 같이 표현될 수 있음을 알 수 있다.

$$\frac{1}{T_z} = 4\pi A (\log)_{\text{BM}} \left\langle \frac{\sigma_H^2}{\sigma_\delta^2} I_{BM}(a, b) \right\rangle, \tag{13.83}$$

여기서, 함수 $I_{BM}(a, b)$는 다음의 적분이다.

$$I_{\text{BM}}(a, b) = \int_0^\infty d\lambda \sqrt{\frac{\lambda}{(a^2+\lambda)(1+\lambda)(b^2+\lambda)}} \left(\frac{1}{a^2+\lambda} - \frac{2}{1+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} \right). \tag{13.84}$$

적분에 대한 명시적인 표현을 (특수 함수를 이용하여) 쓰기전에, 변형된 Pwinski 공식에 의해 주어지는 빔진행 방향 IBS 증가율을 고려하자.

$$\frac{1}{T_z} = A \left\langle \frac{\sigma_H^2}{\sigma_\delta^2} f(a, b, q) \right\rangle, \tag{13.85}$$

여기서, 함수 f는 식 (13.50)으로 주어진다. 쿨롬 로그를 아래와 같이 재정의 하여 인자 $(\log)_{\text{P}}$를 적분 밖으로 끄집어 낼 수 있다고 가정하자.

$$(\log)_{\text{P}} = 2 \ln \left(\frac{q}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) - 0.577. \tag{13.86}$$

이렇게 되면, 함수 f는 다음과 같이 변형된다.

$$f(a,b,q) = 4\pi(\log)_{\mathrm{P}} I_{\mathrm{P}}(a,b), \tag{13.87}$$

또한, 빔진행 방향 IBS 증가율은

$$\frac{1}{T_z} = 4\pi A(\log)_{\mathrm{P}} \left\langle \frac{\sigma_H^2}{\sigma_\delta^2} I_{\mathrm{P}}(a,b) \right\rangle, \tag{13.88}$$

이 되고, 여기서 함수 $I_{\mathrm{P}}(a,b)$는 다음의 적분이 된다.

$$I_{\mathrm{P}}(a,b) = 2\int_0^1 du \frac{1-3u^2}{\sqrt{(a^2+(1-a^2)u^2)(b^2+(1-b^2)u^2)}}. \tag{13.89}$$

만약, Piwinski 공식에 있는 쿨롬 로그 $(\log)_{\mathrm{P}}$와 Bjorken-Mtingwa 공식의 $(\log)_{\mathrm{BM}}$을 같다고 놓으면, 우리는 빔진행 방향 증가율 식 (13.83)과 식 (13.88)이, 만약 $I_{\mathrm{BM}}(a,b) = I_{\mathrm{P}}(a,b)$이라면, 서로 일치하게 되리라는 것을 볼 수 있다. 이것은 여러개의 a 및 b 값에 대해 수치적분을 해보면 확인될 수 있는 사실이다. 식 (13.89)의 표현에 있는 적분은 타원 적분으로 표현될 수 있다.

$$I_{\mathrm{P}}(a,b) = \frac{2}{ab\sin\psi}\left(F(\psi|m) - \frac{3}{\sin^2\bar{\psi}}(F(\psi|m) - E(\psi|m))\right), \tag{13.90}$$

여기서, $E(\psi|m)$은 1종 타원 적분이고, $F(\psi|m)$은 2종 타원 적분이며,

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}, \tag{13.91}$$

$$\sin\bar{\psi} = \frac{\sqrt{b^2-1}}{b}, \tag{13.92}$$

$$m = \frac{\sin^2\bar{\psi}}{\sin^2\psi}. \tag{13.93}$$

타원 적분은 다음과 같이 정의된다.

$$E(\psi|m) = \int_0^\psi \sqrt{1-m\sin^2\theta}\,d\theta, \tag{13.94}$$

$$F(\psi|m) = \int_0^\psi \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}}. \tag{13.95}$$

서로 다른 컴퓨터 코드나 프로그래밍 언어 마다 함수 라이브러리가 있어서 타원 적분의 계산은 효과적으로 할 수 있다. 즉, 수치적분을 직접할 필요는 없다. 이제, 식 (13.88)에서, $(\log)_{\mathrm{P}}$는 식 (13.86)으로 $I_{\mathrm{P}}(a,b)$는 식 (13.90)으로 대입하면, 이 식은 빔진행 방향 IBS 증가에 대한 표현식을 준다. 이제 여기서 필요한 유일한 적분은 저장링 둘레에 대한 평균이다.

Pwinski의 공식을 사용하면, 수평 및 수직 방향으로의 IBS 증가율도 역시 함수 f로 표현될 수 있다. 함수 f는 앞서와 마찬가지로 식 (13.87), (13.86), 그리고 (13.90)으로 계산된다. Bane의 공식 변형을 통해, IBS 증가율 식 (13.42) 및 (13.43)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{T_x} = A\left\langle f\left(\frac{1}{a},\frac{b}{a},\frac{q}{a}\right) + \frac{\eta_x^2\sigma_H^2}{\beta_x\epsilon_x} f(a,b,q)\right\rangle, \tag{13.96}$$

$$\frac{1}{T_y} = A\left\langle f\left(\frac{1}{b},\frac{a}{b},\frac{q}{b}\right) + \frac{\eta_y^2\sigma_H^2}{\beta_y\epsilon_y} f(a,b,q)\right\rangle. \tag{13.97}$$

참고 문헌

[1] A. Wolski, *Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators*, Imperial College Press, 2014.