

가속기 빔동역학 강의 노트

(Andrzej Wolski 교과서 15장 [1])

정모세

UNIST 물리학과

2023년 6월 16일

제 15 장

결맞음성 빔불안정성

서론

우리는 지난 장에서 웨이크 필드에 대해 논의하였고, 이 웨이크 필드가 가속기 안의 하전입자들에 힘을 작용하며, 이 힘은 웨이크 함수 및 임피던스로 기술될 수 있음을 살펴보았다. 이번 장에서는 웨이크 필드가 가속기 빔동역학에 미치는 영향을 구체적으로 살펴보기로 한다. 웨이크 필드의 효과는 가속기의 운전 조건과 웨이크 필드의 특성에 의존하게 될 것이다. 웨이크 필드에 수반되어 발생하는 현상들은 매우 광범위하여, 이러한 다양한 효과들을 분류하는 것조차도 단순하지는 않다. 하지만, 논의를 시작하는 데 있어서는, 다음의 두 개의 영역으로 나누는 것이 다소 편리하다. 즉, 결합-번치 빔불안정성(coupled-bunch instabilities)과 단일-번치 빔불안정성(single-bunch instabilities)으로 나누어서 설명을 해 볼 수 있다.

이 두 빔불안정성을 구분하는 것이 언제나 분명한 것은 아니지만, 보통 결합-번치 빔불안정성의 경우에는 각각의 빔번치가 결맞음성(coherent) 베타트론(betatron) 운동 및 싱크로트론(synchrotron) 운동(특히, 저장링에서)을 하고 있다고 간주할 수 있다. 다른 말로 하면, 각각의 빔번치는 번치 안의 모든 입자들의 총 질량 및 총 전하를 가지는 하나의 ‘macroparticle’(거시입자)로 대표하여 나타낼 수 있다는 것이다. 일반적으로, 거시입자는 질량 및 전하 이외에 다른 성질들, 예를 들어 횡단면 방향 또는 빔진행 방향으로의 크기도 가질 수 있다. 하지만, 번치 사이의 간격이 번치 크기에 비해 충분히 큰 경우에는 각각의 번치(또는 거시입자)를 하나의 점 입자로 간주하는 것이 가능하다. 결합-번치 빔불안정성의 경우에는, 웨이크 필드 영향 아래에서의 빔동역학이 원거리 웨이크 함수(또는, 등가적으로 저주파수 영역의 임피던스)에 의존한다.

반면, 단일-번치 빔불안정성의 경우에는 근거리 웨이크 필드(또는, 등가적으로 고주파수 영역의 임피던스)가 중요하며, 이런 것들이 번치 자체의 분포에 어떤 영향을 미칠지에 관심을 두게 된다. 보통 이 영역에서는 가속기 내부의 각각의 번치를 다른 번치들로부터의 영향에서 격리된 독립적 상태로 취급

한다. 단일-번치 빔불안정성은 제 2 절에서 논의를 하고, 우선 제 1 절에서는 결합-번치 빔불안정성을 다루기로 한다. 특히, 저장링에서 웨이크 필드 영향 아래의 범번치 운동을 기술하는 물리적 모형을 도입할 것이다. 일반적인 조건에서, 웨이크 필드는 번치들의 베타트론 및 싱크로트론 진동의 진폭을 증가시킴을 확인할 수 있게 된다. 적절한 완화 조치가 없다면, 진폭이 무한히 증가하여 빔품질이 나빠지거나, 궁극적으로는 빔손실이 발생된다. 우리의 일차적인 목적은 웨이크 필드에 의한 진동 증가율 (growth rate)에 대한 식을 여러 가속기 파라미터를 이용하여 표현하는 것이 되겠다.

제 1 절 결합-번치 빔불안정성

1.1 횡단면 방향 모드

먼저 균등한 간격으로 저장링에 배치된 n_b 개의 범번치를 가정하자. 우리는 각각의 범번치를 총 전하가 qN_b 인 하나의 점 전하(거시입자)로 취급할 수 있다고 가정한다. 여기서, N_b 는 각 번치안에 있는 실제 입자의 갯수이다. 이번 절에서는 번치들의 베타트론 운동만 고려한다. 빔진행 방향으로의 운동은 다음 절에서 다루기로 한다. 웨이크 필드가 없는 상황에서, 각각의 번치는 진동 주파수 ω_β 의 결맞음성 베타트론 운동(즉, 각 번치 무게중심의 진동)을 할 수 있다. 베타트론 주파수는 집속 격자에서의 사중극자 배열에 의해 결정이 되고, 일반적으로 번치의 저장링 내에서의 위치에 따라 그 값이 달라진다. 만약, 우리가 ‘smooth-focusing’ 가정을 쓸 수 있다면, 베타트론 주파수는 일정한 상수가 되며, 따라서, 웨이크 필드가 있는 상황에서 n 번째 번치의 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} + \omega_\beta^2 x_n = \frac{F_x}{\gamma_0 m N_b} = \frac{F_x c^2}{E_0 N_b}. \quad (15.1)$$

여기서, x 는 번치 무게중심의 수평 방향으로의 변위이며, F_x 는 웨이크 필드로부터 번치에 가해지는 힘, γ_0 는 입자의 상대론적 계수, 그리고 m 은 각각의 입자의 질량이다. $E_0 = \gamma_0 m c^2$ 은 기준 에너지이다. 논의의 편의를 위해, 수평 방향 운동과 수직 방향 또는 빔진행 방향 운동 사이에는 어떠한 상호결합(coupling)도 없다고 가정한다.

좀 더 근사를 적용하여, 웨이크 필드로부터 가해지는 힘은 전체 저장링에 걸친 웨이크 포텐셜을 저장링 원둘레로 나눔으로써 얻어진다고 가정한다. 이러한 가정은 실제적으로 전체 저장링 원둘레에 걸쳐 작용하는 힘의 평균을 주게된다. 웨이크 필드는 모든 번치에 의한, 그리고 모든 이전 턴에서 발생한 전자기장이 합쳐져서 나타나게 되므로, 우리는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_x = -\frac{(qN_b)^2}{C_0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{n_b-1} W_1(z) x_{n'} \left(t + \frac{z}{c}\right), \quad (15.2)$$

여기서, C_0 는 원둘레, n' 은 저장링 내의 모든 번치들을 가리키는 인덱스, 그리고 k 는 이전의 모든 턴들을 나타내는 인덱스이다. z 의 크기는 번치 n 과 n' 사이의 거리에다가, 이전의 턴 수(k) 곱하기 원둘레를

추가한 값으로 주어진다. 즉,

$$z = -\frac{(n' - n)}{n_b} C_0 - k C_0. \quad (15.3)$$

주어진 k 에서, 맨 앞쪽의 번치는 $n' = n_b - 1$, 그리고 맨 뒤의 번치는 $n' = 0$ 이라고 생각할 수 있다. 주어진 번치가 주는 웨이크 필드 효과는 그 번치가 웨이크 필드를 발생하는 시점에서의 위치($x_{n'}$)에 의존함을 볼 수 있다. 그리고, 각각의 번치는 이전 턴에서 자기 자신이 낸 웨이크 필드에도 영향을 받음을 볼 수 있다.

이제 식 (15.2)의 F_x 를 식 (15.1)에 대입하면,

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} + \omega_\beta^2 x_n = -\frac{q^2 N_b c^2}{E_0 C_0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{n_b-1} W_1(z) x_{n'} \left(t + \frac{z}{c} \right). \quad (15.4)$$

다음과 같은 형태로 위 식 (15.4)의 시험해를 가정하자.

$$x_n^\mu(t) = A e^{i(2\pi\mu n/n_b - \Omega_\mu t)}, \quad (15.5)$$

여기서, A 및 μ 는 상수이고, Ω_μ 는 결정해야 할 주파수이다. Ω_μ 의 실수부는 웨이크 필드가 있는 상황에서 각 번치의 베타트론 주파수를 준다. 웨이크 필드는 주파수의 이동을 가져오기 때문에, 이 주파수는 원래의 ω_β 와는 다르게 된다. Ω_μ 의 허수부는 모드의 진폭이 증가할지 감쇠할지를 (그 부호가 양수일지 또는 음수일지에 따라) 결정하게 된다. Ω_μ 의 허수부의 크기는 지수적 증가율 또는 감쇠율에 해당한다.

상수 μ 는 특정한 시간 t 에서 가속기 내부 번치들의 수평 방향 위치들을 기술한다. 만일, $\mu = 0$ 이면, 주어진 시간에서 모든 번치들이 같은 x 좌표계를 가진다. 만일, $\mu = 1$ 이면, 주어진 시간에서 번치들이 cosine 파 형태로 배열이 되고, 그 주기는 저장링의 원둘레가 된다. 마찬가지로, $\mu = 2$ 에 대해서는 그 주기가 저장링 원둘레의 절반이 된다. 나머지 패턴들은 그림 15.1에 나타나 있다. 일반적으로, 어떠한 번치들의 배열(즉, 어떠한 x 좌표계의 조합)도 식 (15.5) 형태의 (서로 다른 μ 와 A 를 가지는) 해들의 합으로 구성할 수 있다. 이러한 관점에서, μ 를 번치 운동의 ‘mode index’(모드 인덱스)라고 부른다.

식 (15.5)의 시험해를 식 (15.4)에 대입하면,

$$\omega_\beta^2 - \Omega_\mu^2 = -\frac{q^2 N_b c^2}{E_0 C_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=0}^{n_b-1} W_1(z) e^{2\pi i \mu (n' - n)/n_b} e^{-i \Omega_\mu z/c}. \quad (15.6)$$

여기서, 우리는 인과율과 관련된 웨이크 함수의 성질, 즉 $z > 0$ 에 대해서 $W_1(z) = 0$ 임을 이용하여, k 의 범위를 $-\infty$ 까지 확장하였다. 이제 $W_1(z)$ 대신 식 (14.170)을 이용하여 임피던스 $Z_1^\perp(\omega)$ 를 대입하자.

$$\omega_\beta^2 - \Omega_\mu^2 = i \frac{q^2 N_b c^2}{2\pi E_0 C_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=0}^{n_b-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega Z_1^\perp(\omega) e^{i\omega z/c} e^{2\pi i \mu (n' - n)/n_b} e^{-i \Omega_\mu z/c}. \quad (15.7)$$

식 (15.3)으로 z 를 치환하고, 여러 지수항들을 하나로 모으면,

$$\omega_\beta^2 - \Omega_\mu^2 = i \frac{q^2 N_b c^2}{2\pi E_0 C_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=0}^{n_b-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega Z_1^\perp(\omega) e^{2\pi i k (\Omega_\mu - \omega)/\omega_0} e^{2\pi i (n' - n)p}, \quad (15.8)$$

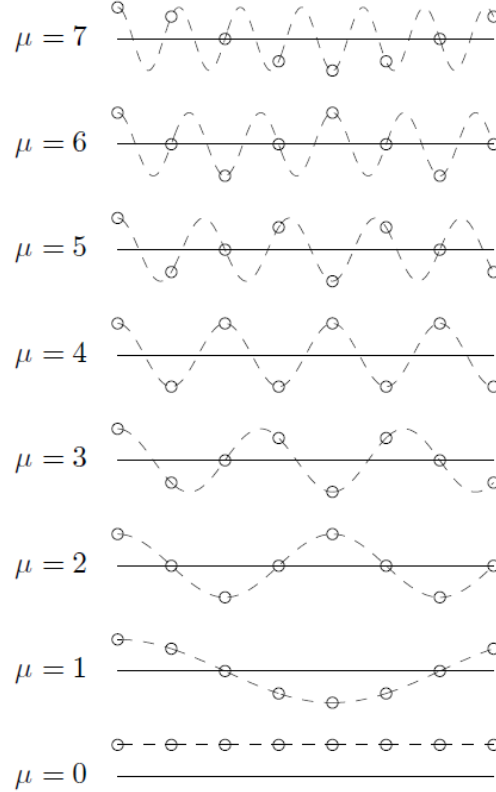


그림 15.1: 서로 다른 모드 μ 의 결합-변치 진동에 대해 저장링에서 변치들의 위치를 나타낸 모식도. 이 그림의 예에서는 $n_b = 8$ 인 변치 배열(원으로 표시)을 가정하였다. 따라서, 모드 번호의 범위는 $0 \leq \mu < 8$ 이다. n 번째 변치의 수평 방향 좌표는 $x_n = A \cos(2\pi\mu n/n_b + \varphi)$ 로 주어지는데, 여기서 A 는 상수인 진폭, μ 는 모드 번호, φ 는 (시간에 의존하는) 위상이다. 각각의 경우에 실선으로 표시한 수평선은 $x_n = 0$ 인 지점을 나타내고, 파선은 n 을 정수 이외의 임의의 값으로 취했을 때 x_n 의 값에 해당한다. 맨 왼쪽의 위치가 $n = 0$ 에 해당하며, 맨 오른쪽 위치는 $n = n_b - 1 = 8 - 1 = 7$ 에 해당한다.

여기서,

$$\omega_0 = 2\pi \frac{c}{C_0} \quad (15.9)$$

는 원둘레 주위로의 회전 각 주파수이고, p 는 다음과 같이 정의되었다.

$$n_b p = \frac{\Omega_\mu - \omega}{\omega_0} + \mu. \quad (15.10)$$

아래의 관계식을 이용하면 (여기서 p' 은 정수),

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k u / u_0} = u_0 \sum_{p'=-\infty}^{\infty} \delta_D(u - p' u_0), \quad (15.11)$$

식 (15.8)은 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\omega_\beta^2 - \Omega_\mu^2 = i \frac{q^2 N_b \omega_0^2 c}{4\pi^2 E_0} \sum_{p'=-\infty}^{\infty} \sum_{n'=0}^{n_b-1} Z_1^\perp(\omega_p) e^{2\pi i(n'-n)p}, \quad (15.12)$$

여기서, ω_p 는 정수 p 에 대해 다음과 같이 정의되었다.

$$\frac{\Omega_\mu - \omega_p}{\omega_0} = p'. \quad (15.13)$$

즉, 식 (15.11)을 이용하여 $u_0 = \omega_0$ 및 $u = \Omega_\mu - \omega$ 로 놓고, ω 에 대한 적분을 수행하면, 디락 델타 함수의 성질에 의해 $\omega = \omega_p$ 인 값들만 기여를 한다. 따라서,

$$n_b p = \frac{\Omega_\mu - \omega_p}{\omega_0} + \mu = p' + \mu. \quad (15.14)$$

n_b 가 매우 큰 수라고 가정하면, 정수 n' 에 대한 급수의 합은 p 가 정수가 아니라면 0에 가깝게 된다. p 가 정수인 경우에는 n' 에 대한 급수의 합 대신, 인자 n_b 를 곱해주면 된다. 그리고 p' 에 대한 무한 급수의 합을 p 에 대해서 써도 무방하다. 따라서,

$$\omega_\beta^2 - \Omega_\mu^2 = i \frac{q^2 N_b \omega_0^2 c}{4\pi^2 E_0} \times n_b \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_1^\perp(\omega_p). \quad (15.15)$$

마지막으로, 우리는 베타트론 주파수의 변화가 작다고 가정한다. 이러한 가정은 두 가지 단순화를 할 수 있게 해준다. 첫째, 우리는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\omega_\beta^2 - \Omega_\mu^2 = (\omega_\beta - \Omega_\mu)(\omega_\beta + \Omega_\mu) \approx 2\omega_\beta(\omega_\beta - \Omega_\mu). \quad (15.16)$$

둘째, 임피던스의 함수 인자로 쓰인 Ω_μ 를 ω_β 로 대체할 수 있게 된다. 따라서, 식 (15.5)은 결과적으로 다음과 같이 변형된다.

$$\Omega_\mu - \omega_\beta = -i \frac{q^2 n_b N_b \omega_0 c}{8\pi^2 E_0 \nu_x} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_1^\perp(\omega_\beta + (\mu - n_b p)\omega_0). \quad (15.17)$$

여기서, $\nu_x = \omega_\beta/\omega_0$ 는 베타트론 튜이다.

식 (15.17)은 우리가 원하던 결과식으로서, 주어진 모드의 베타트론 주파수 Ω_μ 를, 빔과 저장링 격자의 파라미터 그리고 총 임피던스 값으로 나타내 준다. Ω_μ 의 실수부는 웨이크 필드가 있는 상황에서의 베타트론 진동의 주파수를 주고, 허수부는 모드 진폭의 증가율 또는 감쇠율을 나타낸다.

종종 식 (15.17)을 아래와 같이 정의된 빔입자의 고전 반경 r_0 로 나타내기도 한다.

$$r_0 = \frac{Z_0 c}{4\pi} \frac{q^2}{mc^2}. \quad (15.18)$$

식 (15.17)을 r_0 로 나타내면,

$$\Omega_\mu - \omega_\beta = -i \frac{4\pi}{Z_0 c} \frac{n_b N_b r_0 \omega_0 c}{8\pi^2 \gamma_0 \nu_x} \sum_{p=-\infty}^{\infty} Z_1^\perp(\omega_\beta + (\mu - n_b p)\omega_0). \quad (15.19)$$

위 식에서 임피던스가 주파수 ω_p 에서 계산됨을 주목하자.

$$\omega_p = \omega_\beta + (\mu - n_b p)\omega_0. \quad (15.20)$$

이 주파수의 중요성을 이해하기 위해, 저장링의 특정 위치에서 (시간의 함수로) 관측되는 빔전류의 1차 모멘트를 고려하자.

$$xI(t) = (xI)_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_\beta + \mu\omega_0)t} \delta_D(t - nT_0/n_b). \quad (15.21)$$

여기서, $(xI)_0$ 는 신호의 크기이고, T_0 는 회전주기이다. 각각의 변치는 저장링을 돌면서 ω_β 의 주파수로 베타트론 진동을 하게된다. 웨이크 필드에 의한 베타트론 주기의 변화는 무시하였다. 만약 변치들이 모드 μ 으로 배열이 되어있다면, 저장링의 주어진 위치에서 관측되는 주파수는 베타트론 주파수에서 $\mu\omega_0$ 만큼 변화가 생기게 된다. 그림 15.1에 예시로 보인 모드 구조에 따른 입자 위치의 진동과 베타트론 운동이 함께 겹쳐서 나타난다고 보면 되겠다. 저장링에 n_b 개의 변치가 균일하게 배열되어 있다면, 각각의 변치가 관찰 지점을 지나면서 ‘전류 스파이크(spike)’가 일정한 주기 T_0/n_b 로 관찰될 것이다. 식 (15.11)의 항등식과 $\omega_0 = 2\pi/T_0$ 임을 이용하면, 빔 시그널은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$xI(t) = (xI)_0 \frac{n_b}{T_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_p t}. \quad (15.22)$$

무한급수가 $p = 0$ 에 대해서 대칭이므로, $p \rightarrow -p$ 로 치환해도 급수의 합에는 변화가 없다. 여기서 ω_p 는 식 (15.20)로 주어진다. 다른말로 하면, 주파수 ω_p 는 저장링의 고정된 위치에서 관찰되는 빔전류의 1차 모멘트에 포함된 주파수 스펙트럼 성분들이다. 이러한 주파수 성분들에서 웨이크 필드가 유도되기 때문에, 빔에 미치는 웨이크 필드의 효과를 계산하기 위해서는 이러한 주파수에서 임피던스를 계산해야 한다.

이제 특별한 경우로 저항성-벽면 웨이크 필드에 의해 유도되는 (횡단면 방향) 결합-변치 빔불안정성을 살펴보자. 임피던스는 식 (14.178)로 주어지는데 (아래 식), 길이 L 이 저장링의 전체 원둘레에 해당한다. 즉, $L = C_0$ 이다.

$$Z_\perp(\omega) \equiv Z_\perp^\perp(\omega) \approx (1 - i \operatorname{sgn}(\omega)) \frac{c}{\omega} \frac{L}{b^3 c} \sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right) \frac{2|\omega|}{\pi\sigma}}. \quad (14.178)$$

서로 다른 모드들의 증가율 또는 감쇠율이 그림 15.2에 나타나 있다. 임피던스는 저주파 영역에서 가장 크기때문에, 증가율이 가장 높은 모드는 절대값이 가장 작은 음수의 ω_p 에서 나타날 것이다. 음수의 ω_p 인 경우, $Z_\perp(\omega)$ 의 실수부도 음수가 되고, 따라서, 식 (15.17)에 의해 Ω_μ 의 허수부는 양수가 된다. 변치 무게중심은 식 (15.5)와 같이 $\sim e^{-i\Omega_\mu t}$ 의 시간 의존성일 가지기 때문에, 이 경우 진폭이 계속 증가하게 된다. 식 (15.20)으로부터 절대값이 가장 작은 음수의 ω_p 는, 정수의 μ 및 p 값들에 대해 다음의 경우에 나타난다.

$$\mu - n_b p = -[\operatorname{int}(\nu_x) + 1], \quad (15.23)$$

여기서, $\text{int}(\nu_x)$ 는 (수평 방향) 베타트론 튠의 정수 부분을 의미한다. $\nu_x \omega_0 = \omega_\beta$ 이므로 $\omega_p = \omega_\beta - [\text{int}(\nu_x) + 1] \omega_0$ 를 계산하면, 음수이면서 절대값이 가장 작은 $\omega_p = \omega_{p,\min}$ 를 준다. 모드 인덱스의 범위는 $0 \leq \mu < n_b$ 이기 때문에, $\nu_x < n_b$ 를 가정하면 (보통 튠은 수십, n_b 는 harmonic number와 관련되어 있어서 수백임), 식 (15.23)에서 반드시 $p = 1$ 이어야 한다. 그렇지 않으면, 식 (15.23)을 만족하는 μ 가 존재하지 않게 된다. 따라서,

$$\mu = n_b - \text{int}(\nu_x) - 1. \quad (15.24)$$

그리고,

$$\frac{\omega_{p,\min}}{\omega_0} = \text{frac}(\nu_x) - 1. \quad (15.25)$$

여기서, $\text{frac}(\nu_x)$ 는 베타트론 튠의 소수점 부분이다. 위에서 구한 $\omega_{p,\min}$ 를 임피던스 식 (14.178)의 ω 에 대입하면, 가장 빠르게 증폭되는 모드의 증가율을 식 (15.19)로 부터 아래와 같이 얻는다.

$$\frac{1}{\tau} = \text{Im}\Omega_\mu = \frac{n_b N_b r_0 c}{4\pi^2 \gamma_0 \nu_x b^3} \sqrt{\left(\frac{4\pi}{Z_0 c}\right) \frac{c C_0}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{1 - \text{frac}(\nu_x)}}. \quad (15.26)$$

위 식으로부터 저항성-벽면 웨이크 필드에 의한 횡단면 방향 결합-번치 빔불안정성의 증가율은 빔파이프 반경에 대해 강한 의존성이 있음을 볼 수 있다. 반면, 빔파이프를 이루고 있는 재료의 전기전도율에는 약한 의존성을 가진다. 또한, 튠에 대한 의존성때문에, 베타트론 튠의 소수점 부분은 가급적 작게 하고, 정수 부분은 가급적 크게 하는 것이 증가율을 낮출 수 있음을 볼 수 있다.

종종 식 (15.26)의 증가율을 아래의 저장링의 평균 빔전류로 나타내면 편리하다.

$$\langle I \rangle = \frac{n_b N_b q c}{C_0}. \quad (15.27)$$

다음의 특성 전류 I_c 에 대한 표현식을 이용하면,

$$I_c = \frac{q c}{r_0}, \quad (15.28)$$

식 (15.26)의 증가율은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\langle I \rangle}{I_c} \frac{(c C_0)^{3/2}}{4\pi^2 \gamma_0 \nu_x b^3} \sqrt{\left(\frac{4\pi}{Z_0 c}\right) \frac{1}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{1 - \text{frac}(\nu_x)}}. \quad (15.29)$$

전자에 대해서는, I_c 가 알펜 전류 (Alfvén current) $I_A \approx 17.045$ kA에 해당한다. 빔불안정성의 증가율을 식 (15.29)의 형태로 표현함으로써, 우리는 증가율이 저장링의 평균 전류에 비례함을 볼 수 있다. 주어진 집속 격자 형태에 대해, 튠은 대략적으로 원둘레에 비례한다. 따라서, 증가율은 저장링 원둘레의 제곱근에 비례한다. 마지막으로, 증가율은 빔에너지에 대해서는 반비례함을 볼 수 있다.

저장링에서 결합-번치 빔불안정성 진폭의 변화는 모드 번호, 웨이크 필드의 형태, 장치사양 및 빔 운전변수 등에 의존하게 된다. 저항성-벽면 웨이크 필드의 경우, 결합-번치 모드는 다음과 같은 특징적인 거동을 보인다. 즉, 모드 번호가 $n_b - \nu_x$ 에 가까운 경우(여기서, n_b 는 번치의 갯수, ν_x 는 베타트론 튠),

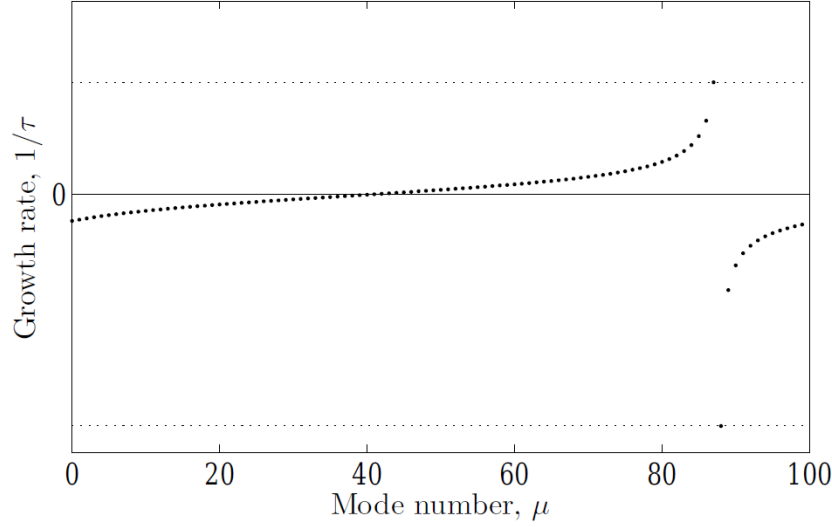


그림 15.2: 저항성-벽면 웨이크 필드에 의해 유도되는 횡단면 방향 결합-번치 모드의 증가율($1/\tau > 0$ 의 경우) 및 감쇠율($1/\tau < 0$ 의 경우). 이 값들은식 (14.178)의 임피던스를 사용하여, 식 (15.19)에 의해 계산되었다. 저장링에 100 개의 균일하게 배열된 번치가 있다고 가정하였고, 따라서, 모드 번호는 $0 \leq \mu < 100$ 의 범위를 가진다. 베타트론 튠은 12.2로 가정하였다. 튠의 정수부분은 어떤 모드가 가장 큰 증가율을 가질지를 결정한다. 이 예에서는 $\mu = 100 - 12 - 1 = 87$ 에서 최대임을 볼 수 있다. 최대 증가율 및 감쇠율은 점선으로 표시가 되어 있다. 튠의 소수점 부분이 0.5 보다 작기 때문에, 식 (15.26)에 주어진 최대 증가율은 최대 감쇠율 보다 그 크기가 작다.

아주 강하게 감쇠하거나($n_b - \nu_x > 0$ 에서) 또는 증폭된다는($n_b - \nu_x < 0$ 에서) 것이다 (그림 15.2 참조). 일반적으로 많은 번치가 있는 저장링에서는, 증폭되는 몇몇 모드가 항상 존재하게 된다. 이 불안정성의 임계점은 없는데, 증폭률은 빔전류에 따라 증가하고, 매우 작은 전류에 대해서도 항상 0이 아닌 증폭률을 가진다. 전형적인 3세대 방사광 가속기로 쓰이는 저장링에서는 저항성-벽면 웨이크 필드에 기인한 모드의 증폭 시간이 대략 수백 턴 수준이고, 경우에 따라서는 짧아지기도 한다. 이러한 사실은 얼핏 들어서 좀 놀라운데, 왜냐하면 대부분의 저장링은 (빔을 불안정하게 하는) 진폭이 큰 결맞음성 베타트론 진동이 없이 분명 잘 작동을 하기 때문이다.

다행스럽게도, 빔이 불안정해지기 전에 결맞음성 진동을 자연스럽게 감쇠시키는 기작들이 존재한다. 특별히 전자빔 저장링에서는 싱크로트론 방사 효과가, 큰 진폭의 베타트론(또는 싱크로트론) 진동을 일으키기 시작하는 입자들의 운동을 자연스럽게 감쇠시킨다. 따라서, 빔번치의 결맞음성 운동도 감쇠하게 된다. 또한, 진폭 및 에너지 차이에 따라 개개의 입자들의 진동 주파수가 다르기 때문에, 빔번치의 결맞음성 진동의 결맞음이 깨지게 된다. 이 과정에서 번치의 크기가 커지지만, 번치의 무게중심은 기준이 되는 폐쇄 궤적을 따라가게 된다. 싱크로트론 방사와 결맞음 깨짐은 빔전류가 낮은 경우에는 결합-번치 빔불안정성을 억제하는데 빠르게 작용할 수 있다. 하지만, 빔전류가 증가하면서 웨이크 필드에

의한 모드 증폭률은 증가하는 반면, 싱크로트론 방사와 결맞음 깨짐에 의한 감쇠율은 고정되어 있기 때문에, 결국, 결합-번치 빔불안정성이 저장링에 입사시킬 수 있는 빔전류의 한계를 규정하게 된다. 전자빔 저장링에서는 빔전류 한계를 가장 빠르게 증폭되는 모드의 증가율이 싱크로트론 방사에 의한 감쇠율 보다 커지기 시작할 때의 전류값을 계산함으로써 대략적으로 예측한다.

Fast feedback system

만약, 요구되는 빔전류가 결합-번치 빔불안정성에 의한 한계값보다 큰 경우에는 각각의 번치들의 결맞음성 진동을 감쇠하기 위한 추가적인 방법이 필요하다. 고속 피드백 시스템(fast feedback system)으로 이런 추가적인 감쇠가 가능하다. 고속 피드백 시스템은 저장링 안의 특정위치에서 번치의 위치를 측정하는 픽업장치(pick-up), 신호증폭기(amplifier), 그리고, 픽업장치에서 증폭된 신호에 따라 번치의 위치를 보정하는 킥(kick)을 인가하는 전극 세트로 이루어져 있다. 피드백 시스템에서의 신호는 광속보다 빨리 전달될 수는 없기 때문에, 킥은 보통 신호가 픽업에서 측정되고 나서 한 턴 또는 그 이상이 지난 후에 인가되게 된다. 고속 피드백 시스템의 세가지 중요한 변수가 있는데, 그것은 대역폭(bandwidth), 이득(gain), 그리고 출력(power)이다. 요구되는 대역폭은 저장링 내부 빔번치사이의 간격에 좌우된다. 즉, 번치사이의 간격이 좁으면, 고주파 영역의 결합-번치 모드가 빔에 나타나고, 따라서 피드백 시스템도 고주파 영역에서 작동이 되어야 한다. 최근의 피드백 시스템은 번치 길이가 1 ns 영역인 양성자 싱크로트론에서의 단일-번치 빔불안정성을 억제하기에 충분한 대역폭을 제공한다. 이득은 피드백 시스템으로 부터 달성할 수 있는 최대 감쇠율을 결정한다. 이득이 너무 높은 시스템의 경우 픽업장치에서의 노이즈에 민감하게 되어, 도리어 빔번치의 결맞음성 운동을 증폭시킬 수도 있다. 적절한 이득을 가진 시스템의 경우, 매우 빠른 감쇠율을 얻을 수 있다. 예를 들면, SLAC의 전자-양전자 충돌형 원형 가속기 PEP-II의 경우, 빔방향 피드백 시스템이 3 ms^{-1} 이상의 감쇠율로 운전되었는데, 이는 약 45 턴에 해당하는 감쇠 시간이다. 피드백 시스템의 최대 출력은 최대 감쇠율을 얻을 수 있는 빔 운동의 진폭 한계를 결정해 준다. 만약, 빔이 적절히 감쇠된다면, 빔 무게중심의 결맞음 운동의 진폭이 작아서 피드백 시스템에 요구되는 출력은 매우 작을 것이다. 하지만, 빔 무게중심에 결맞음 운동이 여기되면 (예를 들어, 저장링에 입자를 입사하는 과정에서), 피드백 시스템에 높은 출력이 요구된다. 특히, 최신 디지털 기술에 바탕을 둔 피드백 시스템의 경우, 결합-번치 빔불안정성을 감쇠시키는 것 뿐만아니라, 빔 거동에 대한 유용한 정보를 제공할 수도 있다.

1.2 빔진행 방향 모드

이제 저장링에서 웨이크 필드가 있는 경우에 빔번치의 싱크로트론 운동을 고려하자. 우리는 다시 저장링이 n_b 개의 균일하게 배열된 번치로 채워져 있다고 가정한다. 그리고 각각의 번치는 전하 qN_b 를 가지는 점전하로 취급할 수 있다고 생각한다. 만약, 저장링 전체의 웨이크 함수가 $W_0(z)$ 라고 하면, 식

(14.141)에 의해, n 번째 번치에서 한 턴 후 개별 입자의 에너지 차이의 변화는 다음과 같이 주어진다.

$$\Delta\delta_n = -\frac{q}{E_0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{n_b-1} qN_b W'_0(Z), \quad (15.30)$$

여기서

$$Z = -\frac{(n' - n)}{n_b} C_0 - kC_0 - z_{n'}(t') + z_n(t), \quad (15.31)$$

그리고,

$$t' = t - \frac{(n' - n)}{n_b} C_0 - kC_0. \quad (15.32)$$

n' 에 대한 급수 합은 저장링 안의 모든 번치가 웨이크 필드에 기여함을 나타내고, k 에 대한 급수 합은 각각의 번치의 모든 턴으로부터의 기여를 포함한다. 식 (15.31)의 마지막 두 항은 번치들의 싱크로트론 운동을 고려한 것이다. 즉, $z_n(t)$ 는 번치 n 의 시간 t 에서 기준 입자에 대한 상대적인 빔진행 방향으로의 위치를 나타낸다. 우리는 번치를 점전하로 가정했음을 다시한번 강조한다. 양수의 $z_n(t)$ 은 시간 t 에서 번치 n 이 기준 입자 보다 앞선 것을 의미한다. 번치의 빔진행 방향으로의 위치 변화율은 다음과 같이 위상 미끄럼 인자 (phase slip factor) η_p 에 의해 에너지 변화와 관련이 되어있다.

$$\frac{dz_n}{dt} = -\eta_p c \delta_n. \quad (15.33)$$

웨이크 필드에 의한 에너지 변화이외에 고주파 시스템에 의한 에너지 변화 및 (전자 가속기의 경우) 싱크로트론 방사에 의한 에너지 변화도 추가로 존재한다. 먼저, 웨이크 필드가 없는 상황에서 번치들이 (고주파 시스템에 의해 만들어진 집속 포텐셜 안에서) 주파수 ω_z 로 싱크로트론 운동을 하고 있다고 가정하자. 이제 웨이크 필드를 고려하면 (하지만, 싱크로트론 방사는 상대적으로 느려서 무시), z_n 에 대한 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d^2 z_n}{dt^2} + \omega_z^2 z_n = \frac{q^2 N_b \eta_p c^2}{E_0 C_0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{n_b} W'_0(Z). \quad (15.34)$$

식 (15.34)의 운동방정식을 풀기 위해, 15.1.1 절에서 사용한 방법을 마찬가지로 적용한다. 다음과 같은 형태의 시험해를 가정하자.

$$z_n^\mu(t) = A e^{i(2\pi\mu n/n_b - \Omega_\mu t)}. \quad (15.35)$$

우리의 목표는 주파수 Ω_μ 에 대한 표현식을 구하는 것이다. 즉, Ω_μ 의 실수부는 주어진 모드 μ 에 대해 웨이크 필드가 있는 상황에서의 싱크로트론 진동 주파수를 주고, Ω_μ 의 허수부는 주어진 모드의 지수적 증가율 또는 감쇠율을 준다. 그 다음 단계는 식 (15.34)의 z_n 을 시험해로 치환하고, $W'_0(Z)$ 는 식 (14.169)로 치환하는 것이다.

$$W'_m(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega z/c} Z_m^\parallel(\omega), \quad \delta_D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \quad (14.169)$$

작은 z_n 의 값에 대해 (그렇다면 그 차이도 작을 것임), 우리는 다음과 같은 근사를 사용한다.

$$e^{i\omega Z/c} \approx \left[1 - i\frac{\omega}{c}(z_{n'}(t') - z_n(t)) \right] e^{-i\omega((n'-n)/n_b+k)C_0/c}. \quad (15.36)$$

z_n 과 $W'_0(Z)$ 를 치환하고, 식 (15.36)을 사용하면, 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\Omega_\mu^2 - \omega_z^2 = i\frac{q^2 n_b N_b \omega_0^2 \eta_p}{4\pi^2 E_0} \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} \omega_p Z_0^\parallel(\omega_p) - \sum_{p_0=-\infty}^{\infty} \omega_{p_0} Z_0^\parallel(\omega_{p_0}) \right), \quad (15.37)$$

여기서

$$\omega_p = \Omega_\mu + (\mu + n_b p)\omega_0, \quad (15.38)$$

$$\omega_{p_0} = n_b p_0 \omega_0, \quad (15.39)$$

그리고, $\omega_0 = 2\pi c/C_0$ 는 원둘레 주위로의 회전 각 주파수이다.

식 (15.37)에서 p_0 에 대한 합은 모드 번호 μ 및 싱크로트론 주파수에 무관하다. 또한, 식 (14.188)에 소개된 임피던스의 성질로부터, p_0 에 대한 급수 합은 순 허수가 됨을 알 수 있다. 따라서,

$$\Omega_\mu^2 - \omega_z^2 = W_s^2 + i\frac{q^2 n_b N_b \omega_0^2 \eta_p}{4\pi^2 E_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \omega_p Z_0^\parallel(\omega_p), \quad (15.40)$$

여기서

$$W_s^2 = \frac{q^2 n_b N_b \omega_0^2 \eta_p}{4\pi^2 E_0} \text{Im} \sum_{p_0=-\infty}^{\infty} \omega_{p_0} Z_0^\parallel(\omega_{p_0}). \quad (15.41)$$

위식에서 W_s^2 는 실수이다. 이 항은 싱크로트론 주파수(ω_z)의 변화에 기여를 하지만, 싱크로트론 운동의 진폭을 증가 또는 감소시키지는 못한다. 또한, W_s^2 는 빔운동의 모드(μ)에 무관하기 때문에, 물리적으로 이 항은 빔이 느끼는 빔진행 방향으로의 집속 포텐셜의 변화를 기술하는 것으로 해석할 수 있다.

논의를 좀더 구체적으로 진행하려면, 우리는 임피던스 $Z_0^\parallel(\omega)$ 에 대한 명시적인 식이 필요하다. 저장-벽면 웨이크 필드도 빔진행 방향 임피던스에 어느정도 기여를 하겠지만, 대부분의 저장링에서 빔진행 방향 임피던스에 주된 기여를 하는 것은 RF 가속관이다. 이때 임피던스는 종종 셉트 임피던스 R_s 와 품질 인자 $Q \gg 1$ 를 가지는 공동공진기의 값 (14.181)로 가정할 수 있다.

$$Z_0^\parallel(\omega) = \frac{R_s}{1 + iQ \left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r} \right)}. \quad (15.42)$$

저장링에서의 RF 가속관은 일반적으로 주파수 $h\omega_0$ 로 운전이 되는데, 이 주파수는 가속관의 공명주파수 ω_r 에 가깝지만 정확히 일치하지는 않는다. 따라서 우리는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\omega_r \approx h\omega_0 + \Delta\omega, \quad (15.43)$$

그리고 여기서 h 는 조화수(RF 주파수를 빔의 회전 주파수로 나눈 값)이다. 공동공진기에서의 임피던스는 주파수가 $\pm\omega_r$ 근처에서 최대이므로, 가속관의 웨이크 필드에 의한 효과는 모드 $\mu = 0$ 이고

$n_b p = h$ 에서 최대가 된다. 이 경우, p 및 p_0 에 대한 급수 합에서 다음의 항들만 포함하면 된다.

$$\omega_p = \omega_z \pm h\omega_0, \quad (15.44)$$

$$\omega_{p0} = \pm h\omega_0. \quad (15.45)$$

이제 공동공진기 임피던스 (14.181)를 식 (15.37)에 대입하고, p 및 p_0 에 대한 급수 합에서 지배적인 항만을 취한 후, ω_z 와 $\Delta\omega$ 의 1차항에 대해 전개하고 나면,

$$\Omega_\mu^2 - \omega_z^2 = i \frac{q^2 n_b N_b \omega_0^2 \eta_p R_s}{4\pi^2 E_0} \left(2\omega_z + \frac{16Q^2 \Delta\omega \omega_z}{h\omega_0} + \frac{2iQ\omega_z^2}{h\omega_0} \right). \quad (15.46)$$

싱크로트론 튠 변화가 작다고 가정하면 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\Omega_\mu^2 - \omega_z^2 = (\Omega_\mu + \omega_z)(\Omega_\mu - \omega_z) \approx 2\omega_z(\Omega_\mu - \omega_z). \quad (15.47)$$

이러한 근사를 통해 식 (15.46)은

$$\Omega_\mu \approx \omega_z + \Delta\omega_z + \frac{i}{\tau}, \quad (15.48)$$

이 되며, 싱크로트론 튠 변화는

$$\Delta\omega_z = - \frac{q^2 n_b N_b \omega_0^2 \eta_p Q R_s}{4\pi^2 E_0 h}, \quad (15.49)$$

그리고, 싱크로트론 진동은 다음의 지수적 증가율을 가진다.

$$\frac{1}{\tau} = \frac{q^2 n_b N_b \omega_0^2 \eta_p R_s}{4\pi^2 E_0} \left(1 + \frac{8Q^2 \Delta\omega}{h\omega_0} \right). \quad (15.50)$$

싱크로트론 튠 변화와 증폭률을 빔입자의 고전 반경 r_0 (15.18)을 이용하여 표현하면 편리하다. 이 경우 싱크로트론 튠 변화는

$$\Delta\omega_z = - \frac{4\pi}{Z_0 c} \frac{r_0 n_b N_b \eta_p Q R_s}{\gamma_0 T_0^2 h}, \quad (15.51)$$

이 된다. 여기서 γ_0 는 기준 에너지를 가지는 입자의 상대론적 계수이며, T_0 는 링을 한바퀴 도는 회전주기이다. 큰 Q 값에 대해서는 식 (15.50)의 괄호안의 두번째 항이 지배적이 되기때문에, 지수적 증가율은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{1}{\tau} = \frac{4\pi}{Z_0 c} \frac{4r_0 n_b N_b \eta_p Q^2 R_s \Delta\omega}{\pi \gamma_0 T_0 h}. \quad (15.52)$$

식 (15.52)로 부터 결맞음성 싱크로트론 진동은 $\eta_p \Delta\omega < 0$ 일 때 감쇠하고, $\eta_p \Delta\omega > 0$ 일 때 증폭됨을 볼 수 있다. 증폭은 빔불안정성에 해당된다. 이러한 특정 형태의 빔불안정성, 즉 싱크로트론 진동의 진폭이 RF 가속공동의 빔진행 방향 임피던스에 의해 증폭되는 현상은 로빈슨 불안정성(*Robinson instability*)으로 알려져 있다.¹ 로빈슨 불안정성을 피하기 위해서는, below transition($\eta_p < 0$)으로 운전 중인 링은 RF 가속관의 공명주파수가 실제 가속관의 운전 주파수보다 약간 높게 튜닝이 되어 한다.

¹K. W. Robinson, Stability of beam in radiofrequency system, Tech. Rep. CEAL-1010 (1964).

즉 $\Delta\omega = \omega_r - h\omega_0 > 0$. 반면, above transition($\eta_p > 0$)인 경우에는 RF 가속관의 공명주파수가 실제 가속관의 운전 주파수보다 약간 낮아야 한다. 로빈슨 불안정성의 물리적인 기작을 이해하기 위해서는, 어떤 구조물의 빔진행 방향 임피던스는, 빔 전류가 주어진 주파수 성분을 포함할 때, 빔이 그 구조물을 지나면서 잃게되는 에너지를 나타낸다는 점을 상기해야 한다. 예로, below transition으로 운전중인 링을 가정하자. 따라서, 이경우 링을 한바퀴 도는 회전주파수는 빔 에너지에 따라 증가한다. 논의의 편의를 위해 링에는 하나의 번치가 있다고 가정하고, 조화수(harmonic number)는 $h = 1$ 로 놓는다. 번치가 결맞음성 싱크로트론 진동을 함에 따라, RF 가속관은 양의 에너지 편차($\delta > 0$)에 대해 더 높은 주파수의 빔 신호를 보게되고, 음의 에너지 편차($\delta < 0$)에 대해서는 더 낮은 주파수의 빔 신호를 보게된다. 만일 가속관의 임피던스도 주파수에 따라 증가한다면, 높은 에너지를 가지는 빔은 더 많은 에너지를 임피던스를 통해 가속관에 빼앗기게 된다 (그림 15.3의 왼쪽). 이것의 알짜 효과는 싱크로트론 진동을 감쇠시키는 것이다. 공진 구조물의 일반적인 임피던스 특성을 고려하면, 임피던스는 $\omega < \omega_r$ 인 경우 (즉, 주파수가 공진 주파수보다 낮을 때), 주파수에 따라 증가하고, $\omega > \omega_r$ 인 경우는 주파수에 따라 감소한다. 따라서, below transition에서 로빈슨 불안정성을 피하기 위해서는 RF 가속관은 실제 공진 주파수보다 낮은 주파수로 운전해야 한다. 반면, above transition인 경우에는 빔 신호의 주파수가 빔 에너지의 증가에 따라 감소하므로, 빔불안정성을 피하기 위해서는 RF 가속관 주파수를 실제 공진 주파수보다 높게 해서 운전해야 한다.

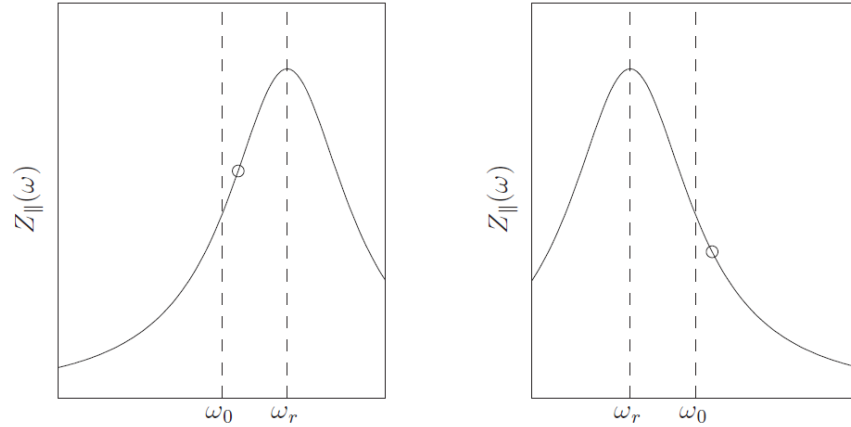


그림 15.3: 로빈슨 빔불안정성의 발생 기작. 여기서, ω_0 는 가속공동에서 전자기장의 진동 주파수를 나타내고, 동시에 ($h = 1$ 이므로) 저장링안에서 평균 에너지 편차 $\langle \delta \rangle = 0$ 인 변치의 회전 주파수도 나타낸다. 왼쪽 그림은 가속공동의 공진 주파수 ω_r 가 ω_0 보다 약간 높게 튜닝이 된 경우이다. 링이 below transition인 경우, 양의 평균 에너지 편차를 가지는 변치($\langle \delta \rangle > 0$, 그림에서 원으로 표시됨)는 ω_0 보다 높은 회전 주파수를 가진다. 이 변치에 있는 입자들은 가속관의 높은 임피던스를 보게되고, 따라서 평균 에너지 편차가 0인 입자들 보다 가속관에 에너지를 더 많이 잃게된다. 이 경우 변치의 결맞음성 싱크로트론 진동은 감쇠될 것이다. 오른쪽 그림은 가속공동의 공진 주파수 ω_r 가 ω_0 보다 약간 낮게 튜닝이 된 경우이다. 이 때는 변치 안의 입자들이 양의 평균 에너지 편차를 가질 때 (그림에서 원으로 표시됨) 더 낮은 임피던스를 보게 된다. 따라서 평균 에너지 편차가 0인 입자들 보다 가속관에 에너지를 덜 잃게되고, 변치의 결맞음성 싱크로트론 진동은 증폭될 것이다. 만일, 링이 above transition인 경우에는 상황이 반대가 된다. 즉, 결맞음성 싱크로트론 진동은 $\omega_r > \omega_0$ 일 때 증폭되고, $\omega_r < \omega_0$ 일 때 감쇠된다.

제 2 절 포텐셜-우물 왜곡

1.2 절에서 우리는 저장링 공동공진기의 빔진행 방향 임피던스가 결맞음성 싱크로트론 진동 주파수의 변화를 가져옴을 확인했다. 이러한 효과는 RF 가속관의 집속 포텐셜이 변화되는 것으로도 해석할 수 있다. 여러 변치들의 결맞음성 운동에 대해서 우리는 임피던스의 저주파 영역에 해당하는 원거리 웨이크 필드를 고려했다. 반면, 하나의 변치 안의 입자들의 동역학을 연구할 때는 임피던스의 고주파 영역에 해당하는 근거리 웨이크 필드를 고려할 필요가 있다. 이 절에서 우리는 근거리 웨이크 필드가 RF 가속관으로부터의 빔진행 방향 집속에 영향을 미치는 것을 살펴 볼 것이다. 이러한 효과는 어떤 측면에서는 원거리 웨이크 필드에 의한 효과와도 유사성이 있다. 일반적으로 웨이크 필드에 의한 빔진행 방향 집속력의 변화는 포텐셜-우물 왜곡(*potential-well distortion*)으로 알려져 있다. 여기서 우리의 목표는 이러한 포텐셜-우물 왜곡이 단일 변치 안의 전하 분포에 미치는 영향을 이해하는 것이다.

우리는 싱크로트론 저장링 안에서 단일 번치 내부의 입자들의 빔진행 방향 운동만을 고려할 것이다. 전체 저장링의 빔진행 방향 웨이크 함수가 $W_{\parallel}(z) \equiv W'_0(z)$ 라고 가정하자. 위상 미끄럼 (phase slip), RF에 의한 집속 및 웨이크 필드를 포함하여, 단일 번치 내부의 하나의 입자에 대한 운동방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{dz}{ds} = -\eta_p \delta, \quad (15.53)$$

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{\omega_z^2}{\eta_p c^2} z + \frac{qV(z)}{E_0 C_0}. \quad (15.54)$$

여기서, z 는 에너지 E_0 를 가지는 기준 입자에 대한 상대적인 빔진행 방향으로의 위치이고, δ 는 에너지 편차, η_p 는 위상 미끄럼 인자, C_0 는 저장링의 원둘레, ω_z 는 웨이크 필드가 없는 상황에서의 싱크로트론 주파수, 그리고 q 는 입자의 전하량이다. 포텐셜 $V(z)$ 는 저장링 안의 웨이크 필드에 의한 효과를 기술하며, 다음과 같이 주어진다.

$$V(z) = - \int_z^{\infty} \lambda(z') W_{\parallel}(z - z') dz'. \quad (15.55)$$

여기서, λ 는 번치 안에서 빔진행 방향으로의 전하 분포(단위는 Cm^{-1}) 이다. 식 (15.54) 우변의 두번째 항의 형태는 웨이크함수 (14.141)로 부터 웨이크 포텐셜을 정의하면서 얻어졌다. 식 (15.55)의 적분 범위는 빔진행 방향 위치 z 에 있는 입자보다 앞서가는 모든 전하를 포함하도록 잡는다.

식 (15.53) 및 (15.54)의 운동방정식은 다음의 해밀토니안으로부터 유도될 수 있다.

$$H = -\frac{\eta_p}{2} \delta^2 - \frac{\omega_z^2}{2\eta_p c^2} z^2 - \frac{q}{E_0 C_0} \int_0^z V(z') dz'. \quad (15.56)$$

우리는 위상 미끄럼 인자, 빔진행 방향 집속력, 그리고 웨이크 함수를 저장링의 전체 원둘레에 대해 평균을 취하였다. 이러한 가정은 싱크로트론 운동과 웨이크 필드 효과가 저장링을 도는 회전 주파수보다 느린 경우에 효과적이다. 실제로도 이런 상황이 대부분이다. 식 (15.56)의 해밀토니안은 s 에 대한 명시적 의존성을 가지지 않는다. 따라서, 해밀토니안은 운동 상수이다.

$$\frac{dH}{ds} = 0 \quad (15.57)$$

해밀토니안이 운동 상수이므로, 동역학 변수 z 및 δ 로 이루어진 임의의 함수가 해밀토니안의 함수로 표현가능하다면 이 역시 운동 상수가 된다. 특별히, $\Psi(z, \delta)$ 가 빔진행 방향 위상공간에서 입자의 분포를 나타낸다고 놓자. 만약,

$$\Psi(z, \delta) = \Psi(H), \quad (15.58)$$

이라면, 입자 분포는 시간에 대해 일정할 것이다.

웨이크 필드가 없는 경우에 전자 (또는 양전자) 저장링의 입자 번치는 Gaussian 분포로 감쇠될 것이다.

$$\begin{aligned}\Psi(z, \delta) &= \frac{N_b}{2\pi\sigma_z\sigma_\delta} e^{-\delta^2/2\sigma_\delta^2} e^{-z^2/2\sigma_z^2} \\ &= \frac{N_b}{2\pi\sigma_z\sigma_\delta} e^{H/\eta_p\sigma_\delta^2}.\end{aligned}\quad (15.59)$$

여기서, N_b 는 번치안의 총 입자 갯수이다. 평형상태에서의 에너지 편차 σ_δ 는 싱크로트론 방사 효과 (7.94)에 의해 결정되고, 평형상태에서의 번치 길이 σ_z 는 식 (7.96)에 의해 주어진다.

$$\sigma_z = -c \frac{\eta_p}{\omega_z} \sigma_\delta. \quad (15.60)$$

여기서 우리는 초상대론적 경우 ($\beta_0 \rightarrow 1$)를 가정하였다. 전자 저장링에서는 RF 전압을 바꾸게 되면, 평형상태의 번치 길이를 변화시킨다. 반면, 평형상태의 에너지 편차에는 영향을 미치지 못한다. RF 시스템과 웨이크 필드는, 빔진행 방향 좌표 z 에 의존해서, 입자에 빔진행 방향으로 힘을 가한다는 면에서 유사성이 있다. 따라서 우리는 웨이크 필드가 평형상태 에너지 편차는 변화시키지 않고, 다만 빔진행 방향 전하 분포에만 영향을 미친다고 가정할 수 있다. 특별히, 우리는 빔진행 방향 위상공간에서의 분포를 정확히 식 (15.59)로 나타내기로 한다. 대신, 헤밀토니안은 식 (15.56)을 사용한다. 빔진행 방향으로의 전하 분포 λ 는 위상공간 분포와 아래와 같은 관계를 가지기 때문에,

$$\lambda(z) = q \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(z, \delta) d\delta, \quad (15.61)$$

웨이크 필드가 있는 경우 빔진행 방향 전하 분포는 다음과 같은 식을 만족하게 될 것이다.

$$\lambda(z) = A \exp \left(-\frac{z^2}{2\sigma_z^2} - \frac{q}{\eta_p\sigma_\delta^2 E_0 C_0} \int_0^z V(z') dz' \right). \quad (15.62)$$

여기서, σ_z 는 식 (15.60)으로 주어진다. 상수 A 는 다음의 정규화 조건에 의해 결정된다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(z) dz = qN_b. \quad (15.63)$$

여기서, qN_b 는 번치안의 총 전하량이다.

식 (15.62)는 Haissinski (하이신스키) 방정식이라고 알려져 있다.² 포텐셜 $V(z)$ 는 전하 분포 λ 에 의존하기 때문에, Haissinski 방정식은 평형상태의 빔진행 방향 전하 분포에 대한 일종의 적분방정식이다. 이 식은 저장링에서 빔진행 방향 웨이크 필드가 있는 경우를 가정했다. Haissinski 방정식이 정확히 해석적으로 풀리는 몇 가지 특별한 경우가 있기는 하다. 하지만, 일반적으로 Haissinski 방정식은 수치적으로 풀어야 한다 (예를 들면, 반복계산법을 이용하여). 빔진행 방향 웨이크 필드에 의한 빔진행 방향 전하 분포의 왜곡의 예가 그림 15.4에 잘 나타나 있다.

²J. Haissinski, Exact longitudinal equilibrium distribution of stored electrons in the presence of self-fields, Il Nuovo Cimento B **18** (1973).

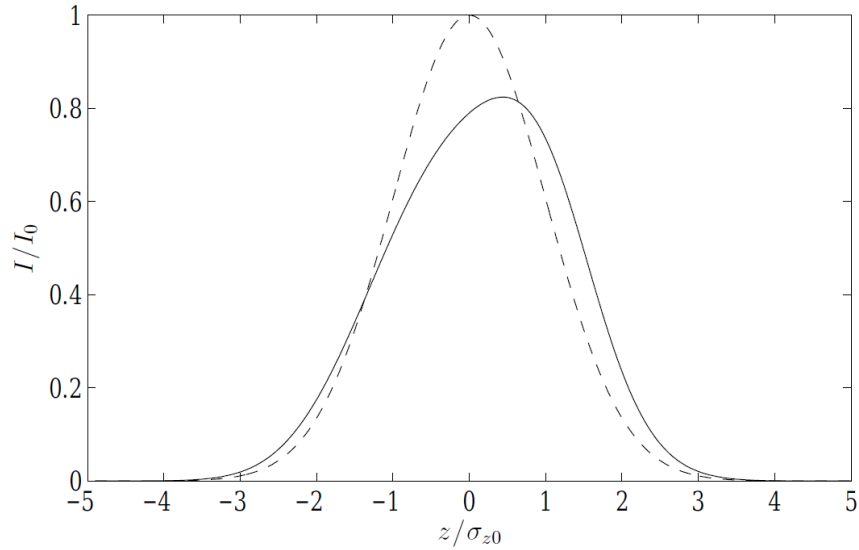


그림 15.4: 싱크로트론 저장링에서의 포텐셜 우물의 왜곡. 파선은 웨이크 필드가 없는 경우 변치 안의 위치의 함수로 전류분포를 보여준다. 첨두 전류 및 rms 변치 길이는 I_0 및 σ_{z0} 로 각각 나타내었다. 실선은 근거리 웨이크 필드가 있는 경우 빔전류를 나타낸다. 빔전류는 식 (15.62)의 Haissinski 방정식을 주어진 웨이크 필드에 대해 수치적으로 풀어서 얻는다. 이 그림의 경우는 웨이크 필드가 주파수 공간에서 공동공진기 임피던스 식 (14.181)으로 주어졌을 때이고, $Q \approx 1$ 및 $\omega_r \approx 2c/\sigma_{z0}$ 이다. 여기서 우리는 전하 분포가 비대칭이 된 것을 알 수 있고, 앞쪽(변치의 머리 부분)으로 기울어지는 경향을 보인다. 저장링이 above transition으로 운전 될 때, 변치의 머리 부분의 입자들은 기준 입자들 보다 RF 가속관에 먼저 도착하고 더 높은 에너지를 가속관으로 부터 얻는다. 이런 과정은 웨이크 필드에 의한 에너지 손실을 보상해준다. (주: 변치의 꼬리 부분의 입자들은 에너지 편차가 커져서 above transition 운전에서 변치 머리 쪽으로 쏠리게 된다.)

하지만, 주어진 장치 파라미터와 웨이크 함수에 대해서, Haissinski 방정식의 해가 반드시 존재한다는 보장은 없다. 만약에 Haissinski 방정식의 해가 없다면, 평형상태의 빔진행 방향 빔 분포가 존재하지 않는다는 이야기다. 즉, 저장링안에서 전하 분포가 지속적으로 변화함을 의미한다. 다른말로 하면, 빔이 불안정해진다. 식 (15.62)을 좀 더 자세히 살펴보면, 우리는 빔불안정성이 (근거리에서) 웨이크 함수가 클때, 변치 전하가 높을때, 또는 위상 미끄럼이나 에너지 편차가 작을 때 일어날 수 있음을 유추할 수 있다. 어떤 경우에서건, 식 (15.62)의 웨이크 함수가 포함된 항이 커지게 되고, 빔 거동에 상당한 영향을 미치게 된다. 실제로, 이런 모든 조건들은 빔불안정성의 발현과 연관이 되어 있다. 하지만, Haissinski 방정식만으로는 이런 현상을 명확하게 설명하지는 못한다. 수학적으로 (주어진 파라미터 세트와 웨이크 함수에 대해) Haissinski 방정식의 해가 존재할지 안할지를 증명하는 것은 매우 어렵다. 빔진행 방향으로의 변치 전하 분포의 안정성을 결정하는 다른 방법은 Vlasov 방정식으로부터 출발하여 도출할 수 있다. 관련 내용은 다음 절에서 다루기로 한다.

제 3 절 관성운동 빔: 마이크로파 불안정성

우리는 15.2절에서 빔진행 방향 웨이크 필드가 저장링 내부 입자가 보는 빔진행 방향 집속 포텐셜의 변화를 가져올 수 있음을 보았다. 집속 포텐셜의 변화는 변치내 전하 분포의 변화에 의존하고, 전하 분포 자체는 또 집속 포텐셜에 영향을 받는다. 평형상태 분포는 (만약 존재한다면) 식 (15.62)의 Haissinski 방정식을 만족한다. 실제에서는 만일 변치내 전하량이 어떤 한계값을 넘게 되면, 변치가 불안정해지고 평형상태 분포가 존재하지 않는 것이 발견된다. 따라서, 저장링을 설계하거나 운전할 때는 이런 한계값을 아는 것이 중요하다. 하지만, 이런 과정은 Haissinski 방정식으로 부터 결정하기는 어렵다.

빔불안정성의 한계값을 찾는 다른 접근방법으로 Vlasov 방정식을 이용하는 것이 있는데, 이 방정식은 전하 분포의 변화를 기술하는 편미분 방정식이다. 만일 저장링 내부의 전하가 균일한 분포(즉, 변칭이 되지 않은 상태)를 가지고, 어떤 주어진 파장의 작은 밀도 변조가 있다면, Vlasov 방정식은 그 밀도 변조의 주파수(즉, 시간의존성)를 주는 분산관계식을 도출한다. 만일, 주파수가 허수부를 가지면, 밀도 변조의 크기는 감쇠하거나 또는 증폭된다. 따라서, 분산관계식을 밀도 변조의 주파수에 대해 풀면 빔의 안정성에 대한 정보를 얻을 수 있다. 적절한 가정을 통해, 이러한 이론 모형을 저장링의 변치가 된 빔에 대해서도 적용이 가능하다. 이번 절에서 우리는 Vlasov 방정식과 분산관계식에 기반한 해석기법을 전개할 것이고, 이를 통해 주어진 장치 파라미터와 웨이크 함수에 대해 빔이 불안정해지는 한계 전류를 결정하고자 한다.

이 해석에서는 시간을 독립 변수로 사용하고, θ 와 δ 를 동역학 변수로 사용하는 것이 편리하다. 에너지 편차 δ 는 식 (2.55)에서 다음과 같이 주어진다.

$$\delta = \frac{E}{cP_0} - \frac{1}{\beta_0} = \frac{1}{\beta_0} \frac{E - E_0}{E_0} \approx \frac{E - E_0}{E_0}. \quad (15.64)$$

여기서 E 는 입자의 에너지이고, E_0 는 기준 에너지이다. 이 기준 에너지는 기준 운동량 P_0 및 기준 속도 $\beta_0 c$ 에 해당한다. θ 는 입자의 좌표계로서, 저장링 둘레로의 빔진행 방향 위치를 radian으로 나타낸다.

$$\theta = 2\pi \frac{s}{C_0}. \quad (15.65)$$

여기서, s 는 기준 궤적을 따라서 측정되는 거리이고, C_0 는 저장링의 원둘레이다. 우리는 초상대론적 상황($\beta_0 \rightarrow 1$)을 가정한다.

RF 시스템, 싱크로트론 복사 및 웨이크 필드가 없는 경우에, 저장링 내부의 입자하나에 대한 운동 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0(1 - \eta_p \delta). \quad (15.66)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 0. \quad (15.67)$$

여기서, η_p 는 위상 미끄럼 인자, 그리고 ω_0 는 $\delta = 0$ 인 입자의 회전 주파수이다. 우리는 당분간 RF 시스템 및 싱크로트론 복사가 없다는 가정을 계속 사용할 것이다. 이 경우 저장링 안의 입자들은 관성운

동 빔(*coasting beam*)을 이루고, 싱크로트론 진동은 없게 된다. 이런 조건하에서, 빔은 저장링 전체를 채우게 될 것이고, 따라서 어떤 지점에서건 빔 전류는 (근사적으로) 시간에 대해 일정하게 될 것이다. 다만, 어느정도의 작은 무작위적 섭동은 존재할 것이다.

웨이크 필드가 존재하는 경우, 입자들은 웨이크 필드에 의한 빔진행 방향 힘으로 부터 약간의 에너지 변화를 느낄 것이다. 따라서, 식 (15.67)은 수정이 될 것이다. 빔진행 방향 웨이크 필드가 임피던스 $Z_{\parallel}(\omega) \equiv Z_0^{\parallel}(\omega)$ 로 기술된다고 가정하자. 그리고, $Z_{\parallel}(0) = 0$ 이라 놓자. 즉, 빔전류의 DC 성분은 어떤 웨이크 필드도 여기시키지 않는다는 것이다. 이런 가정은, 예를 들면, 저항성-벽면 웨이크 필드를 제외시킨다. 더 나아가 주어진 시간 주어진 저장링 위치에서 빔전류가 다음의 형태를 갖는다고 가정하자.

$$I(\theta, t) = I_0 + \Delta I e^{i(\theta n - \omega_n t)}. \quad (15.68)$$

빔전류는 진폭 ΔI 의 변조를 가지고, 파장이 C_0/n (C_0 는 장치의 둘레)인 파동 형태로 (주어진 위치에서) 주파수 ω_n 으로 진동한다. 만약, ω_n 이 허수부를 가지면, 변조의 진폭은 감쇠되거나 또는 증폭될 것이다. 빔의 안정성 여부를 판별하기 위해 우리는 전류 변조의 진동 주파수인 ω_n 에 대한 표현식을 찾을 필요가 있다.

계속해서 해석을 진행하기 위해, 우리는 먼저 웨이크 필드의 효과가 고려된 δ 에 대한 정확한 운동방정식을 적을 필요가 있다. 식 (14.161)을 이용하면, 어떤 주어진 입자의 에너지 편차의 변화는 다음과 같다.

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{q}{E_0 T_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{I}(\omega) Z_{\parallel}(\omega). \quad (15.69)$$

여기서, T_0 는 회전 주기이다. 식 (15.68)으로부터 전류 스펙트럼은 주파수 ω_n 에서 단일한 성분을 가짐을 알 수 있다.

$$\tilde{I}(\omega) = 2\pi \Delta I e^{in\theta} \delta_D(\omega - \omega_n). \quad (15.70)$$

여기서, $\delta_D(\omega - \omega_n)$ 는 디랙 델타 함수이다. 식 (15.69)에 $\tilde{I}(\omega)$ 을 대입하면,

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{q}{E_0 T_0} \Delta I Z_{\parallel}(\omega_n) e^{i(n\theta - \omega_n t)}. \quad (15.71)$$

식 (15.66) 및 (15.71)은 웨이크 필드가 있는 상황에서 저장링 안의 단일 입자의 운동을 기술하는 방정식을 준다. 단일 입자의 운동방정식을 구한 후, 그 다음 단계로 할 것은 전하 분포의 전개를 기술하는 방정식을 적는 것이다. 만약, 개별 입자의 운동이 해밀토니안 방정식을 만족한다면 (지금의 경우와 같이), 위상공간에서 입자 분포의 전개는 Vlasov 방정식에 의해 기술된다. 지금 논의하고 있는 경우에는 (자유도가 1이고, 동역학 변수로 θ 와 δ 를 사용) Vlasov 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{d\theta}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{d\delta}{dt} \frac{\partial \Psi}{\partial \delta} = 0. \quad (15.72)$$

여기서 $\Psi(\theta, \delta; t)$ 는 위상공간에서 입자의 밀도를 나타낸다. Vlasov 방정식 (15.72)은 본질적으로 Liouville 정리 (2.93)의 표현식이다. 식 (15.66) 및 (15.67)로 주어진 $d\theta/dt$ 및 $d\delta/dt$ 에 대한 명시적 표현식을

이용하면, 우리는 $\Psi(\theta, \delta; t)$ 에 대한 편미분 방정식을 얻는다. 우리는 이 편미분 방정식을 적절히 조작하면 전류 변조의 주파수 ω_n 과 집속 격자 변수, 임피던스, 빔의 에너지 분포를 연관 짓는 적분방정식을 얻을 수 있게 된다. 이 방정식은 주어진 집속 격자와 임피던스에 대해 주어진 에너지 분포를 가진 빔의 안정성을 결정하도록 해준다.

Vlasov 방정식을 다루기 위해, 전류 변조의 크기 ΔI 를 위상공간의 밀도 변조를 기술하는 물리량으로 바꾸는 것이 편리하다. 이런 과정은 다음과 같이 진행될 수 있다. 먼저 빔전류는 다음과 같이 위상공간 밀도와 관련이 되어 있다.

$$I(\theta, t) = q\omega_0 \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\theta, \delta; t) d\delta. \quad (15.73)$$

다음과 같이 쓰고 나면,

$$\Psi(\theta, \delta; t) = \frac{\Psi_0(\delta)}{2\pi} + \frac{\Delta\Psi(\delta)}{2\pi} e^{i(n\theta - \omega_n t)}, \quad (15.74)$$

우리는 전류 변조가 위상공간 밀도 변조와 직접적으로 관련지을 수 있음을 볼 수 있다.

$$\Delta I = \frac{q\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\Psi(\delta) d\delta = \frac{q\omega_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\Psi(\delta') d\delta'. \quad (15.75)$$

입자 밀도 변조의 크기는 실좌표 공간에서 (일반적으로) 에너지 편차의 함수가 된다. 식 (15.75)의 ΔI 를 식 (15.71)에 대입하면, δ 에 대한 운동방정식을 다음의 형태로 얻는다.

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{q^2}{T_0^2 E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\Psi(\delta') d\delta' \times Z_{\parallel}(\omega_n) e^{i(n\theta - \omega_n t)}. \quad (15.76)$$

식 (15.66) 및 (15.76)의 $d\theta/dt$ 및 $d\delta/dt$ 에 대한 식을 Vlasov 방정식 (15.72)에 대입하고, 작은 밀도 변조 $\Delta\Psi(\delta)$ 에 대해 1차항까지만 전개하면,

$$\Delta\Psi(\delta) = -i \frac{q^2}{T_0^2 E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\Psi(\delta') d\delta' \times Z_{\parallel}(\omega_n) \frac{\partial\Psi_0/\partial\delta}{n\omega_0(1 - \eta_p\delta) - \omega_n}. \quad (15.77)$$

에너지 편차의 함수인 위상공간 밀도 변조 $\Delta\Psi(\delta)$ 는 알려져 있지 않다. 하지만, 식 (15.77)에서 양변을 δ 에 대해 적분을 함으로써, 이 항을 제거할 수는 있다. $\Delta\Psi(\delta)$ 를 δ 에 대해 적분한 항이 양변에 나타나고, 서로 상쇄되어 다음과 같이 식이 된다.

$$1 = -i \frac{q^2}{2\pi T_0 E_0} \frac{Z_{\parallel}(\omega_n)}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial\Psi_0/\partial\delta}{1 - \omega_n/n\omega_0 - \eta_p\delta} d\delta. \quad (15.78)$$

식 (15.78)은 분산관계식이다. 원칙적으로 이 방정식을 풀어서 파수 C_0/n 을 가지는 빔전류 변조의 주파수 ω_n 을 찾을 수 있다. 주파수 ω_n 의 허수부는 변조가 감쇠될지 (음의 허수부), 또는 증폭될지 (양의 허수부) 결정한다.

분산관계식 (15.78)은 관성운동 빔에 대해서만 유효하다는 점을 기억해야 한다. 우리는 이 결과들은 어떻게 번치가 된 빔에 대해 적용하는지도 잠시 살펴볼 것이다. 하지만, 우리는 먼저 관성운동 빔의 경우 에너지 분포 Ψ_0 에 대한 두 예를 고려할 것이다.

Negative-mass instability

첫번째 예로, 빔이 에너지 편차를 가지지 않는 경우를 가정하자. 즉, 분포가 디랙 델타 함수이다.

$$\Psi_0(\delta) = N_b \delta_D(\delta). \quad (15.79)$$

여기서, N_b 는 빔의 전체 입자 갯수이다. 부분적분을 통해 우리는 다음을 얻는다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi_0 / \partial \delta}{1 - \omega_n / n\omega_0 - \eta_p \delta} d\delta = -\frac{N_b \eta_p}{(1 - \omega_n / n\omega_0)^2}. \quad (15.80)$$

따라서, 분산관계식 (15.78)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\omega_n}{n\omega_0} = 1 \pm \sqrt{i \frac{q I_0 \eta_p}{2\pi E_0} \frac{Z_{\parallel}(n\omega_0)}{n}}. \quad (15.81)$$

여기서, 평균 빔 전류는 다음과 같이 정의되었다 (따라서, $q I_0 \propto q^2 > 0$ 은 항상 양수).

$$I_0 = \frac{q N_b}{T_0}. \quad (15.82)$$

그리고, 우리는 $Z_{\parallel}(\omega_n) \approx Z_{\parallel}(n\omega_0)$ 로 쓸 수 있다고 가정한다. 순수한 용량성 임피던스의 경우 (즉, $\text{Im} Z_{\parallel}(\omega) > 0$), 빔은 below transition ($\eta_p < 0$)에서 안정되고, 반면 above transition ($\eta_p > 0$)에서 불안정하게 된다. 공간전하 임피던스 (12.292)는 순수한 용량성 임피던스의 하나의 예이다. 이런 경우 발생하는 빔의 불안정성은 음의 질량 빔불안정성(negative mass instability)이라고 알려져 있고, 다음과 같은 간단한 물리적 논거에 의해 설명될 수 있다. 밀도 분포의 피크 바로 앞쪽의 입자들은 공간 전하 힘으로 부터 에너지를 얻는다. 반면, 피크 뒤에 있는 입자들은 에너지를 잃는다. Below transition 에서, 높은 에너지를 갖는 입자는 높은 회전 주파수를 가지고, 따라서 밀도 피크의 앞쪽으로 나가려는 경향을 가진다. 낮은 에너지를 갖는 입자들은 피크의 뒤쪽으로 미끄러진다. 이것의 순 효과는 입자 밀도의 피크를 뭉개는 것이다. Above transition 에서는, 반대로, 피크 앞쪽에서 공간 전하에 의해 에너지를 얻는 입자들은 피크쪽으로 후퇴하고, 피크 뒤쪽의 입자들은 피크 쪽으로 전진해 간다. 결과적으로, 입자 밀도에 어떠한 피크라도 감소하기 보다는 계속해서 증가하는 경향을 가질 것이다.

일반적으로 가속기에서의 빔진행 방향 임피던스는 허수부뿐만 아니라, 실수부도 가진다. 식 (15.81)에서 우리는, 순수한 유도성 임피던스의 경우(즉, $\text{Im} Z_{\parallel}(\omega) < 0$)이거나 또는 임피던스가 실수 (저항) 성분을 가질 때는, 항상 양의 허수부를 가지는 ω_n 의 해가 존재함을 볼 수 있다. 따라서, 에너지 편차가 0인 빔은 언제나 불안정해진다.

Microwave instability

두번째 예로, Gaussian 에너지 편차를 가지는 관성운동 빔을 생각하자.

$$\Psi_0(\delta) = \frac{N_b}{\sqrt{2\pi\sigma_\delta}} e^{-\delta^2/2\sigma_\delta^2}. \quad (15.83)$$

이 식을 분산관계식 (15.78)에 대입하고, 적분변수를 δ 에서 $\zeta = \delta/\sigma_\delta$ 로 바꾸면,

$$1 = -i \frac{qI_0}{(2\pi)^{3/2} E_0 \eta_p \sigma_\delta^2} \frac{Z_{\parallel}(\omega_n)}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta e^{-\zeta^2/2}}{\Delta_n + \zeta} d\zeta. \quad (15.84)$$

여기서, I_0 는 평균 빔전류 (15.81)이고, 우리는 다음의 변수 Δ_n 를 정의한다.

$$\Delta_n = \frac{\omega_n/n\omega_0 - 1}{\eta_p \sigma_\delta} \quad (15.85)$$

이 단계에서 우리는 식 (15.84)를 (주어진 임피던스에 대해) Δ_n 에 대해 풀어야 하고, ω_n 의 허수부를 얻어야 한다. 하지만, 이 작업은 매우 어렵기 때문에, 우리는 다른 접근 방식을 택하기로 한다. 만약 다음과 같은 함수 $F(\Delta_n)$ 를 정의하면,

$$\frac{1}{F(\Delta_n)} = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta e^{-\zeta^2/2}}{\Delta_n + \zeta} d\zeta, \quad (15.86)$$

식 (15.84)은 다음의 형태로 쓸 수 있게된다.

$$\frac{qI_0}{2\pi E_0 \eta_p \sigma_\delta^2} \frac{Z_{\parallel}(\omega_n)}{n} = F(\Delta_n). \quad (15.87)$$

이제, 우리는 $F(\Delta_n)$ 의 실수부와 허수부를 특정 범위의 Δ_n 값에 대해 (허수값은 고정하고) 그려 볼 수 있다. Δ_n 의 허수값은 ω_n 의 허수부로부터만 오기 때문에, 복소평면에서 이러한 방식으로 그려진 선들은 빔전류 변조의 어떤 고정된 증폭률 또는 감쇠율에 해당이 될 것이다.

그림 15.5의 실선은 다음의 식을

$$u + iv = F(\Delta_n), \quad (15.88)$$

특정 범위에서 Δ_n 의 실수값에 대해 나타낸 것이다. 음의 허수부(감쇠되는 빔전류 변조에 해당)를 가지는 ω_n 에 대해서는 실선 안쪽의 점들을 주고, 양의 허수부(증폭되는 빔전류 변조에 해당)를 가지는 ω_n 에 대해서는 실선 바깥쪽의 점들을 준다. 주어진 운전조건과 임피던스에 대해 어떤 빔이 안정하냐를 판단하기 위해, 우리는 다음과 같이 정의된 곡선을 특정 범위의 ω 값에 대해 그릴 수 있다.

$$u + iv = \frac{qI_0}{2\pi E_0 \eta_p \sigma_\delta^2} \frac{Z_{\parallel}(\omega)}{\omega/\omega_0}. \quad (15.89)$$

만약 $\omega_n \approx n\omega_0$ 라면, 식 (15.89)로 정의되는 곡선은 어떤 범위의 n 에 대해 다음과 같이 정의되는 곡선에 근접하게 된다.

$$u + iv = \frac{qI_0}{2\pi E_0 \eta_p \sigma_\delta^2} \frac{Z_{\parallel}(\omega_n)}{n} \quad (15.90)$$

만일 식 (15.89)로 정의되는 곡선이 어떤 범위의 ω 에서 실수의 Δ_n 에 대해 식 (15.88)로 정의되는 경계를 넘어가게되면, 분산관계식은 음의 허수부를 가지는 ω_n 에 대한 해를 가지게 된다. 이경우 빔은 불안정해 진다.

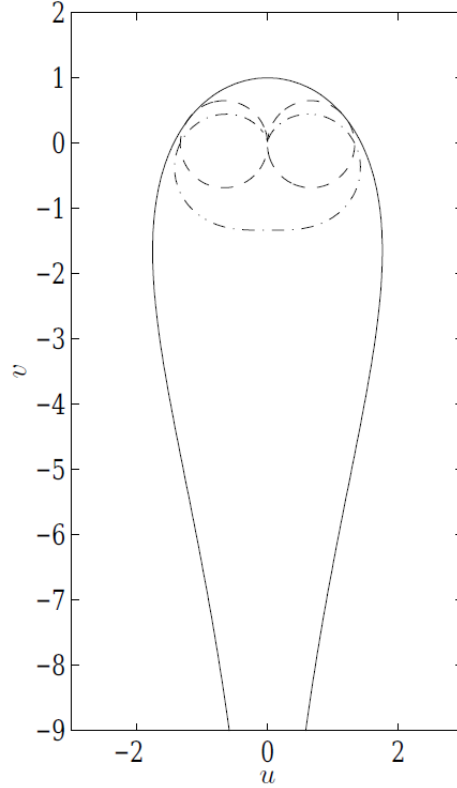


그림 15.5: 마이크로파 불안정성의 임계값을 주는 Keil-Schnell 조건식 (15.95)의 유도. 실선은 식 (15.86)으로 정의된 $u + iv = F(\Delta_n)$ 을 실수값 ω_n 에 대해 보여준다. 이 곡선 안쪽에서는 ω_n 의 허수부는 음수이다(즉, 주파수 ω_n 을 가지는 빔 밀도의 섭동은 감쇠). 이 곡선 바깥쪽에서는 ω_n 의 허수부는 양수이다(즉, 주파수 ω_n 을 가지는 빔 밀도의 섭동은 증폭). 쇄선 및 파선은 식 (15.89)로 정의된 곡선을 나타내며, 각각 공동공진기 임피던스에서 $Q = 1$ 및 $Q = 10$ 인 경우를 각각 나타낸다. 섀트 임피던스의 R_s 의 값은 식 (15.92)를 만족하도록 정해졌다.

예를 들어 식 (14.181)의 공동공진기 임피던스를 가정하자.

$$Z_{\parallel}(\omega) = \frac{R_s}{1 + iQ \left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r} \right)}. \quad (15.91)$$

그림 15.5의 파선은 식 (15.89)로 정의된 곡선을 보여준다. 이때, 식 (15.91)의 임피던스를 특정 범위의 ω 에 대해 계산하여 사용하였고, 다음을 가정하였다.

$$\frac{qI_0}{2\pi E_0 \eta_p \sigma_\delta^2} \frac{\omega_0}{\omega_r} R_s = \frac{4}{3}. \quad (15.92)$$

위 식 (15.92)의 조건 일때, 식 (15.89)로 정의된 파선은 식 (15.88)로 정의된 실선에 가까와 지거나 (작은 값의 $Q \approx 1$ 에 대해) 또는 경계를 넘게 된다 (큰 값의 $Q \gg 1$ 에 대해). 따라서, 빔이 안정할 조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_0 < \frac{8\pi E_0 |\eta_p| \sigma_\delta^2}{3q\omega_0 R_s / \omega_r}. \quad (15.93)$$

그림 15.5의 파선은 주파수가 $n\omega_0 \approx \omega_r$ 일때 실선을 넘어간다. 여기서, ω_r 은 임피던스 소스의 공진 주파수이다. 빔 밀도 변조의 불안정 모드는 결국 그 주파수가 불안정성을 야기하는 임피던스의 공진 주파수에 가까울 때이다. 저장링에서는 여러 다양한 컴포넌트가 임피던스에 기여한다. 특히, 주파수가 mm 영역에 해당하는 공진이 매우 흔하다. 이러한 길이 정도로 빔의 밀도 변조를 일으키는 빔진행 방향 불안정성은 상당한 양의 마이크로파를 발진시키기 때문에, 보통 마이크로파 빔불안정성 (*microwave instability*)라고 부른다.

Keil-Schnell criterion

공동공진기 임피던스 (15.91)은 특별한 경우이다. 좀더 일반적으로 빔불안정성의 문턱값은 종종 임피던스의 크기를 통해 (임피던스의 특정 형태는 고려하고 않고) 표현된다. 다음의 경우에

$$|F(\Delta_n)| < 1, \quad (15.94)$$

Δ_n 의 허수부가 항상 음수라는 것을 이용하면, 우리는 다음의 조건에서 모든 n 값에 대해 빔이 안정하게 된다고 이야기할 수 있다.

$$\left| \frac{Z_{\parallel}(n\omega_0)}{n} \right| < \frac{2\pi E_0 |\eta_p| \sigma_\delta^2}{q I_0}. \quad (15.95)$$

이 조건 (15.95)은 *Keil-Schnell* 조건식이라고 알려져 있다.³

Keil-Schnell 조건식을 유도하는데 사용된 기본 가정은 빔이 변칭이 되지않고 관성운동을 한다는 것이었다. 즉, 빔진행 방향 집속이 없고, 싱크로트론 진동이 없다고 가정하였다. 이러한 조건을 완화하여 변칭이 된 빔에도 적용할 수 있는 수정된 Keil-Schnell 조건식을 다음과 같이 찾을 수 있다. 빔진행 방향으로 밀도 변조를 가지는 변칭이 된 빔을 가정하자. 이 이론 모형이 의미있기 위해서는, 밀도 변조의 파장이 각각의 변치 길이 보다 작아야 한다. 예를 들면, 변치들이 빔진행 방향으로 표준 변차 σ_z 의 Gaussian 분포를 가진다면, 우리는 밀도 변조의 파장이 C_0/n 인 경우만 고려한다. 여기서 C_0 는 저장링의 원둘레이고,

$$n \gg \frac{C_0}{\sigma_z}. \quad (15.96)$$

또한, 빔불안정성이 성장되는 시간 스케일이 싱크로트론 주기보다 짧다고 가정한다. 이러한 조건을 만족하는 밀도 변조에 대해, 우리는 각각의 변치를 Gaussian 변치의 첨두 전류값($qN_b c / \sqrt{2\pi}\sigma_z$)을 평균 빔전류 값(I_0)으로 가지는 연속적인 빔으로 가정한다.

$$I_0 = \frac{qN_b c}{\sqrt{2\pi}\sigma_z}. \quad (15.97)$$

³E. Keil and W. Schnell, Concerning longitudinal instability in the ISR, Tech. Rep. CERN-ISR-TH-RF/69-48 (1969).

여기서 N_b 는 번치내의 입자 갯수이다. 결과적으로 얻어진 빔 안정성 조건은 *Keil-Schnell-Boussard* 조건식이라고 다음과 같이 알려져 있다.⁴

$$\left| \frac{Z_{\parallel}(n\omega_0)}{n} \right| < \frac{(2\pi)^{3/2} E_0 |\eta_p| \sigma_\delta^2 \sigma_z}{q^2 N_b c} \quad (15.98)$$

비록 Keil-Schnell 조건식 (또는 Keil-Schnell-Boussard 조건식)이 종종 빔불안정성이 일어날 가능성을 가리키는데 유용할 수 있지만, 그 결과는 일반적으로 그대로 받아드려서는 안된다. 특별히, Keil-Schnell 조건식은 이 조건에서 빔이 안정하게 된다는 (충분) 조건 하나를 말하는 것이지, 이 조건을 만족하지 않으면 반드시 빔이 불안정해 진다는 것을 암시하는 것은 아니다. 그 이유는 $\text{Im } \omega_n < 0$ 으로 정의된 경계 영역이 복소 평면에서 단순한 원이 아니기 때문이다. 특히, 그림 15.5에서 보듯이, 음의 허수 축을 따라서 있는 모든 점들은 $\text{Im } \omega_n < 0$ 인 영역 안에 들어있다. 이것은 Gaussian 에너지 분포를 가지는 빔은, 임피던스가 below transition에서는 순수한 용량성이거나 또는 above transition에서는 순수한 유도성이기만 하면, 임피던스가 얼마나 크냐에 상황없이 항상 안정하다는 것을 의미한다. 이러한 상황은 에너지 편차가 없을 때 공간전하 임피던스의 경우에 해당한다. 그럼에도 불구하고, 임피던스의 절대값이 크게되면, 아주 작은 임피던스의 실수부라고 하더라도 빔불안정성을 야기시킬 수 있다.

좀더 적절하게 빔 안정성을 판단하기 위해서는 장치 임피던스의 정확한 정보가 요구된다. 불행히도, 저장링의 임피던스를 계산하는 것은 쉽지 않은 일이다. 특히, 큰 저장링의 경우 상당한 노력이 요구된다. 높은 주파수 대역의 임피던스가 종종 중요한데, 한 섹션의 빔라인에서 이런 고주파 임피던스를 정확하게 계산하는 것은 넓은 영역의 부피에 걸쳐 매우 높은 정밀도로 맥스웰 방정식의 해를 얻는 것에 의존한다. 실제로 운전되는 저장링에서 장치의 임피던스를 측정하는 것 역시 매우 힘든 일이다. 보통은 저장링에서 관찰되는 빔의 거동은 진공 챔버의 모델로부터 계산된 값보다 높은 임피던스를 가정할 때 훨씬 더 잘 들어맞는다. 진공 챔버의 임피던스는 종종 하나의 값 $Z_{\parallel}/n$ 으로 특징지어 진다. 광대역 공진기(즉, 공진기의 품질인자가 $Q \approx 1$ 인 경우)는 주파수가 $\omega < \omega_r$ 인 경우

$$\frac{|Z_{\parallel}(\omega)|}{\omega} \approx \frac{R_s}{\omega_r} \quad (15.99)$$

과 같은 거동을 보이고, 따라서,

$$\frac{|Z_{\parallel}(n\omega_0)|}{n} \approx \frac{\omega_0 R_s}{\omega_r} = \frac{2\pi c R_s}{\omega_r C_0} \quad (15.100)$$

이 된다. 여기서 R_s 는 shunt 임피던스이다. 따라서, $Z_{\parallel}/n$ 은 본질적으로 저장링의 단위 길이당 임피던스의 평균값이 된다. 대전류 운전을 위해 설계된 현대의 저장링들은 $Z_{\parallel}/n$ 의 값이 100 mΩ 이하 정도가 되도록 하고 있다.

⁴D. Boussard, Observation of microwave longitudinal instabilities in the CPS, Tech. Rep. LABII/RF/Int./75-2 (1975).

비록 Keil-Schnell 조건식 (15.95)가 빔 안정성의 엄밀한 조건을 주지는 못하지만, 식 (15.95)로 결정되는 불안정성 문턱값이 다양한 장치 파라미터에 어떻게 의존하는지를 고찰하는 것은 여전히 매우 흥미로운 주제이다. 우선적으로, 빔 에너지에 대한 선형적인 의존성이 있음을 볼 수 있다. 빔 에너지가 높을수록 빔 운동의 경직성이 커지고, 따라서 빔 안의 입자 운동에 영향을 미치는 외부 전자기장에 덜 민감해 진다. 둘째로, 임피던스의 한계는 입자의 전하량과 빔전류에 반비례 관계가 있음을 볼 수 있다. 빔파이프에 발생하는 웨이크 필드의 크기는 빔전류에 비례한다. 웨이크 필드가 입자에 미치는 힘은 전하량에 비례한다. 마지막으로 임피던스의 한계는 위상 미끄럼 인자와 에너지 편차(퍼짐)의 제공에 비례한다. 빔 안정성이 이러한 값들에 의존하는 것은 장치 설계 및 운전에 있어서 매우 중요하며, 다음과 같은 간단한 물리적 논거로 설명될 수 있다. 빔이 저장링의 어떤 임피던스 성분의 공진 주파수로 밀도 변조가 되기 시작했다고 생각하자. 만약에 임피던스가 어떤 적당한 성질을 보인다면, 밀도 변조에 의해 발생된 웨이크 필드가 다시 변조의 크기를 키우는 방향으로 작용하게 된다. 결과적으로 밀도 변조의 진폭이 지수함수적으로 증가하게 된다. 하지만, 저장링 빔 안의 입자들은, 입자의 에너지 및 위상 미끄럼 인자에 따라, 서로 다른 회전주기로 돈다. 만약, 저장링이 매우 큰 위상 미끄럼 인자를 가지고, 또 빔의 에너지 편차가 크다면, 입자들의 회전주기의 퍼짐은 밀도 변조가 증폭되는 것을 막게된다. 밀도 변조의 크기가 상당한 수준으로 증폭되는 것은 임피던스의 효과가 충분히 커서, 입자들의 회전주기 퍼짐에 의해 밀도 변조가 평탄화 되는 정도보다 밀도 변조를 증폭시키는 정도가 클 때이다. 이것은 일종의 임계 효과로 나타나는데, 즉 임피던스(또는 빔전류)가 어떤 특정 값보다 클때만 빔불안정성(밀도 변조의 진폭이 증폭되는 현상)이 나타나게 된다.

Landau damping

빔 회전주기(또는 진동주기)의 퍼뜨림에 의한 가속기 빔불안정성의 억제는 *Landau damping*으로 알려져 있다.⁵ Landau damping은 플라즈마 물리의 관점에서 처음 기술되었는데, 입자들의 진동주기의 퍼짐에 의한 결맞음(decoherence)이 플라즈마 파동의 진폭을 감쇠시키게 된다. 엄밀하게 말해서, 가속기에서의 Landau damping은 변치 안 입자운동의 결맞음을 기술하는 것은 아니다. 오히려, 결맞음 운동이 초기에 발생하는 것 자체를 억제하는 것이라고 볼 수 있다. 이러한 구별은 중요하다. 왜냐하면, 가속기에서의 Landau damping은 그렇지 않는데, 일반적으로 결맞음은 빔 이미턴스의 증가를 가져오기 때문이다.

플라즈마에서의 Landau damping(플라즈마 파동의 진폭이 감쇠되는 것을 기술)과 가속기에서의 Landau damping(불안정성의 억제를 기술)과의 차이점에도 불구하고, 두 기작 모두 입자 진동 주기의 퍼짐에서 비롯된다는 점에서, 상당한 공통점이 있다. 만약, 저장링 빔의 에너지 퍼짐이 없다면, 또는 위상 미끄럼 인자가 0이라면, 모든 입자들은 저장링 주위를 똑 같은 회전주기를 가지고 돌게 될 것이고, 밀도 변조의 발달과정은 결맞음 상태에 있게될 것이다. 즉, Landau damping은 없게 된다. 결과적으로

⁵L. Landau, On the vibration of the electronic plasma, Journal of Physics (USSR) **10** (1946).

빔불안정성의 문턱값(임피던스의 크기 또는 빔전류의 관점에서)이 실질적으로 0인 상태가 된다.

한가지 중요하게 짚고 넘어갈 점은 비록 어떤 빔불안정성이 발생한다고 할지라도, 저장링의 성능에는 크게 영향을 미치지 않을 수 있다는 점이다. 우리가 유도한 결과들, 특별히 Keil-Schnell 조건식 (15.95)은 어떤 조건하에서 빔이 불안정해 질 수 있다는 가능성을 나타내지만, 불안정성 임계값을 넘을 때 실제 어떤 식으로 빔이 거동할 지는 알려주지 않는다. 이것의 한가지 이유는 우리가 Vlasov 방정식에 선형 근사(밀도 변조의 진폭의 관점에서)를 사용했다는 것이다. 밀도 변조의 진폭이 관찰이 가능할 정도로 충분히 커지고 나면, 변조는 더이상 작은 섭동으로 취급하기가 어렵고, Vlasov 방정식에 적용된 선형 근사도 더이상 유효하지 않다.

실제로는 싱크로트론 저장링을 마이크로파 빔불안정성의 임계 전류값 보다 높여 운전하는 것이 그리 드문 경우는 아니다. 빔불안정성의 임계값 이하에서 운전하는 전자 저장링에서, 빔 분포는 싱크로트론 복사에 의해 결정되는 어떤 평형상태에 이르게 된다. 빔진행 방향의 위상공간에서는, 이러한 분포가 매끈한 2차원 Gaussian 분포로 주어질 것이다. 만약, 추가로 입자들이 번치로 입사가 되어 빔전류가 불안정성의 임계값보다 커지게 된다면, 밀도 변조가 나타나기 시작할 것이다. 싱크로트론 진동때문에, 초기에 빔진행 방향의 좌표 z 만의 함수였던 밀도의 변화는 빔진행 방향의 위상공간상에서 회전을 하게 되고, 따라서 에너지 편차 δ 축에서도 밀도 변조가 발생한다. 전반적인 동역학은 상당히 복잡하게 될 수 있지만, 실제로 관찰될 수 있는 것은 약간의 번치 길이 증가와 에너지 퍼짐의 증가 정도뿐이다. 이러한 효과는 종종 *turbulent bunch lengthening*으로 알려져 있다. 다른 말로 하면, 전반적인 빔진행 방향 이 미턴스의 증가는 있지만, 전하의 분포는 여전히 평형상태에 이르게 된다. 만약, 빔전류가 계속해서 더 증가한다면 좀더 복잡한 현상들이 나타나게 된다. 예를 들어, 번치 안의 입자 분포가 주기적으로 (또는 준주기적으로) 변할 수 있고, 어떤 평형상태에도 이르지 못할 수 있다. 결합-번치 빔불안정성의 경우, 고속 피드백 시스템을 이용하여 결맞음성 번치 진동을 억제할 수 있다. 하지만, 단일-번치 빔불안정성의 경우, 불안정성이 발전되는 시간 스케일이 종종 너무 빨라서, 고속 피드백 시스템이 유효한 제어 수단이 되지 못한다. 이경우 주요한 불안정성 완화 방법은 저장링이 적절한 위상 미끄럼 인자와 에너지 퍼짐을 가지도록 설계를 하는 것이고, 또 임피던스를 가급적 작게 유지하도록 빔 파이프를 설계하고 제작하는 일이 되겠다.

제 4 절 단일-번치 빔불안정성

15장 1절에서 우리는 빔에 미치는 웨이크 필드의 효과를, 번치를 하나의 거시입자로 취급하는 모형을 이용하여 논의한 바 있다. 다른 말로 하면, 하나의 번치안에 있는 모든 입자들은 웨이크 필드로부터 받는 힘에 반응하여 똑같이 움직인다고 가정을 한 것이다. 이러한 모형은 몇몇 중요한 효과들을 기술할 수 있다. 하지만, 웨이크 필드의 중요한 효과에는 번치 내부의 전하 분포에 영향을 미치는 것들도 있다.

번치안의 입자의 갯수는 보통 10^9 또는 10^{10} 정도로 매우 많기 때문에, 번치안 입자들의 집단 동역학을 엄밀하게 기술하는 것은 매우 어렵다. 두 가지 방법이 가능하겠다. 하나는 번치를 전하의 연속체로 표현하여 유체역학의 해석방법을 적용하는 것이고, 다른 하나는 번치를 몇 개의 작은 수의 입자의 집합(심지어 단 2개로)으로 취급하는 것이다. 물론, 두 방법 모두 엄밀하게 정확한 것은 아니다. 그럼에도 불구하고, 이러한 방법들은 빔 거동의 이해를 위한 통찰력을 주고 유용한 결과를 도출하기도 한다. 이번 절에서 우리는 여러 다양한 현상들을 기술하게 될텐데, 어떤 것은 연속체 모형으로 좀 더 쉽게 이해가 가능하고, 반면에 다른 것들은 거시입자 모형으로 좀 더 잘 취급된다. 우리는 주어진 각각의 경우에 대해 가장 적합한 모형을 사용할 것이다. 우리의 목표는 일반적으로 웨이크 필드가 하나의 번치안의 전하 분포에 어떠한 영향을 주는 지를 이해하는 것이고, 특별히 어떤 조건하에서 번치가 정상상태의 평형 분포에 이르지 못하는 가를 결정하는 것이다. 즉, 우리는 어떤 조건에서 빔불안정성이 발생하게 되는지를 결정하고자 한다.

4.1 머리-꼬리 빔불안정성

빠른 머리-꼬리 빔불안정성

첫번째 경우로, 횡단면 방향 웨이크 필드가 있는 경우에 싱크로트론 저장링을 돌고 있는 번치를 가정하고, 그 번치안의 입자들은 베타트론 운동을 하고 있다 생각하자. 웨이크 필드는 번치안의 서로 다른 입자들의 베타트론 진동사이에 결합을 가져온다. 여기에 수반되는 동역학을 이해하려면, 싱크로트론 운동이 또한 고려가 되어야 한다. 우리는 번치를 두 개의 거시입자로 가정해서 동역학을 해석하기로 하고, 각각의 거시입자는 번치의 총 전하를 반반씩 나눠 가진다고 생각하자. 우리는 만약 웨이크 필드가 충분히 강하고, 또는 번치 전하가 충분히 크다면, 두 거시입자의 베타트론 운동의 지수적으로 증가하는 것을 발견하게 될 것이다. 즉, 빔불안정성이 발생하게 된다. 불안정성의 임계값은 저장링의 파라미터들로 표현이 될 수 있다.

먼저 거시입자의 횡단면 방향 및 빔진행 방향의 정준(canonical) 좌표계를 (x_1, p_{x1}) 및 (z_1, δ_1) 로 각각 놓자. 마찬가지로 두번째 거시입자의 횡단면 방향 및 빔진행 방향의 정준 좌표계는 (x_2, p_{x2}) 및 (z_2, δ_2) 이다. 우리는 하나의 번치 길이에서만 존재하는 웨이크 필드만을 고려하기로 한다. 즉, 우리는 저장링안의 다른 번치로 부터 오는 영향은 무시한다. 베타 함수 $\beta_x = 1/k_\beta$ 가 일정하다고 가정하면(즉, smooth-focusing 가정을 적용하면) 첫번째 거시입자의 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dx_1}{ds} = p_{x1}, \quad (15.101)$$

$$\frac{dp_{x1}}{ds} = -k_\beta^2 x_1 + \frac{F_\perp}{E_0}. \quad (15.102)$$

여기서 $E_0(\approx cP_0)$ 는 기준 에너지(P_0 는 기준 운동량)이다. 그리고, $F_\perp$ 는 다른 거시입자로 부터 생성된 웨이크 필드에 의해 받는 힘이다. 전체 저장링의 웨이크 함수 $W_\perp(z)$ 를 이용하면, 횡단면 방향의 힘

$F_{\perp}$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_{\perp} = \frac{q^2 N_b}{2} \frac{W_{\perp}(z_1 - z_2)}{C_0} x_2. \quad (15.103)$$

여기서, q 는 입자하나의 전하량이고, N_b 는 번치안의 입자 갯수, 그리고, C_0 는 저장링의 원둘레이다. 만약 거시입자 1이 거시입자 2에 앞서 있다면, $z_1 - z_2 > 0$ 이고 웨이크에 의한 힘은 없게 된다. 두번째 거시입자의 운동방정식도 마찬가지로 방법으로 쓸 수 있다.

$$\frac{dx_2}{ds} = p_{x2}, \quad (15.104)$$

$$\frac{dp_{x2}}{ds} = -k_{\beta}^2 x_2 + \frac{q^2 N_b}{2} \frac{W_{\perp}(z_2 - z_1)}{E_0 C_0} x_1. \quad (15.105)$$

이제 두 거시입자 사이의 싱크로트론 운동 위상차가 π 라고 가정하고, 각각의 거시입자의 싱크로트론 운동 진폭은 σ_z (rms 번치 길이)라고 하자. 그러면, 두 거시입자 사이의 빔진행 방향 거리 차이는

$$z_1 - z_2 = \sigma_z \sin(k_z s) - \sigma_z \sin(k_z s - \pi) = 2\sigma_z \sin(k_z s) \quad (15.106)$$

이다. 여기서

$$k_z = \frac{d\phi_z}{ds} \quad (15.107)$$

이고, ϕ_z 는 거시입자 1의 싱크로트론 위상이다. 해석을 단순화하기 위해 웨이크 함수에 대해 선형 근사를 사용할 수 있다고 가정한다 (횡단면 방향 웨이크 함수는 sine 함수꼴). 따라서, $z > 0$ 에 대해 다음과 같다.

$$W_{\perp}(-z) = \frac{z}{\sigma_z} W_{\perp}(-\sigma_z). \quad (15.108)$$

그리고, 첫번째 입자의 싱크로트론 위상을 $s = 0$ 에서 $z_1 = 0$ 및 $dz_1/ds > 0$ 이 되도록 잡으면, 첫번째 거시입자의 운동방정식은 싱크로트론 반주기 $0 < s < \pi/|k_z|$ 에 대해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dx_1}{ds} = p_{x1}, \quad (15.109)$$

$$\frac{dp_{x1}}{ds} = -k_{\beta}^2 x_1. \quad (15.110)$$

그리고, 두번째 거시입자에 대해서는

$$\frac{dx_2}{ds} = p_{x2}, \quad (15.111)$$

$$\frac{dp_{x2}}{ds} = -k_{\beta}^2 x_2 + A k_z k_{\beta} \sin(k_z s) x_1 \quad (15.112)$$

이다. 여기서 무차원화된 변수 A 는 다음과 같이 정의되었다.

$$A = q^2 N_b \frac{W_{\perp}(-\sigma_z)}{|k_z| k_{\beta} E_0 C_0}. \quad (15.113)$$

운동방정식 (15.109)–(15.112)의 해는 수송 행렬을 이용하여 $0 < s < \pi/|k_z|$ (그리고, $0 < s + \Delta s < \pi/|k_z|$)에 대해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ p_{x1} \\ x_2 \\ p_{x2} \end{pmatrix}_{s+\Delta s} = \mathcal{R}_I(\Delta s) \begin{pmatrix} x_1 \\ p_{x1} \\ x_2 \\ p_{x2} \end{pmatrix}_s. \quad (15.114)$$

여기서,

$$\mathcal{R}_I(\Delta s) = \begin{pmatrix} \cos(k_\beta \Delta s) & \frac{1}{k_\beta} \sin(k_\beta \Delta s) & 0 & 0 \\ -k_\beta \sin(k_\beta \Delta s) & \cos(k_\beta \Delta s) & 0 & 0 \\ R_{31}(\Delta s) & R_{32}(\Delta s) & \cos(k_\beta \Delta s) & \frac{1}{k_\beta} \sin(k_\beta \Delta s) \\ R'_{31}(\Delta s) & R'_{32}(\Delta s) & -k_\beta \sin(k_\beta \Delta s) & \cos(k_\beta \Delta s) \end{pmatrix}. \quad (15.115)$$

행렬 요소 $R_{31}(\Delta s)$ 및 $R_{32}(\Delta s)$ 는 다음과 주어진다.

$$R_{31}(\Delta s) = \frac{A}{4k_\beta^2 - k_z^2} \times (k_z k_\beta \sin(k_z \Delta s) \cos(k_\beta \Delta s) + [2k_\beta^2(1 - \cos(k_z \Delta s)) - k_z^2] \sin(k_\beta \Delta s)), \quad (15.116)$$

$$R_{32}(\Delta s) = \frac{A}{4k_\beta^2 - k_z^2} \times (k_z \sin(k_z \Delta s) \sin(k_\beta \Delta s) - 2k_\beta [1 - \cos(k_z \Delta s)] \cos(k_\beta \Delta s)). \quad (15.117)$$

행렬 요소 $R'_{31}(\Delta s)$ 및 $R'_{32}(\Delta s)$ 는 각각 $R_{31}(\Delta s)$ 및 $R_{32}(\Delta s)$ 의 미분값이다.

이어지는 싱크로트론 반주기 $\pi/|k_z| < s < 2\pi/|k_z|$ 동안에, 두 거시입자의 역할은 반대로 된다. 거시입자 2가 거시입자 1에 앞서가고, 거시입자 1의 운동은 거시입자 2가 발생하는 웨이크필드의 영향을 받게된다. 두 상황의 대칭성에 의해, 우리는 바로 $\pi/|k_z| < s < 2\pi/|k_z|$ 인 경우에 운동방정식의 해를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ p_{x1} \\ x_2 \\ p_{x2} \end{pmatrix}_{s+\Delta s} = \mathcal{R}_{II}(\Delta s) \begin{pmatrix} x_1 \\ p_{x1} \\ x_2 \\ p_{x2} \end{pmatrix}_s. \quad (15.118)$$

여기서,

$$\mathcal{R}_{II}(\Delta s) = \begin{pmatrix} \cos(k_\beta \Delta s) & \frac{1}{k_\beta} \sin(k_\beta \Delta s) & R_{31}(\Delta s) & R_{32}(\Delta s) \\ -k_\beta \sin(k_\beta \Delta s) & \cos(k_\beta \Delta s) & R'_{31}(\Delta s) & R'_{32}(\Delta s) \\ 0 & 0 & \cos(k_\beta \Delta s) & \frac{1}{k_\beta} \sin(k_\beta \Delta s) \\ 0 & 0 & -k_\beta \sin(k_\beta \Delta s) & \cos(k_\beta \Delta s) \end{pmatrix}. \quad (15.119)$$

전체 싱크로트론 주기에 대한 수송 행렬은 전반 싱크로트론 주기와 후반 싱크로트론 주기에서 계산된 수송 행렬을 곱해서 얻을 수 있다.

$$\mathcal{M} = \mathcal{R}_{\text{II}}(\pi/|k_z|)\mathcal{R}_{\text{I}}(\pi/|k_z|). \quad (15.120)$$

만약, 다음의 경우라면

$$|k_z| \ll k_\beta, \quad (15.121)$$

행렬 $\mathcal{M}$ 은 다음과 같이 근사될 수 있다.

$$\mathcal{M} \approx \mathcal{A}\mathcal{R}. \quad (15.122)$$

여기서 $\mathcal{A}$ 및 $\mathcal{R}$ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 - A^2 & 0 & 0 & -A/k_\beta \\ 0 & 1 - A^2 & k_\beta A & 0 \\ 0 & -A/k_\beta & 1 & 0 \\ k_\beta A & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15.123)$$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\left(2\pi \frac{k_\beta}{|k_z|}\right) & \frac{1}{k_\beta} \sin\left(2\pi \frac{k_\beta}{|k_z|}\right) & 0 & 0 \\ -k_\beta \sin\left(2\pi \frac{k_\beta}{|k_z|}\right) & \cos\left(2\pi \frac{k_\beta}{|k_z|}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(2\pi \frac{k_\beta}{|k_z|}\right) & \frac{1}{k_\beta} \sin\left(2\pi \frac{k_\beta}{|k_z|}\right) \\ 0 & 0 & -k_\beta \sin\left(2\pi \frac{k_\beta}{|k_z|}\right) & \cos\left(2\pi \frac{k_\beta}{|k_z|}\right) \end{pmatrix}. \quad (15.124)$$

행렬 $\mathcal{R}$ 은 각각의 거시입자가 만드는 일반적인 베타트론 진동을 나타낸다. 행렬 $\mathcal{A}$ 는 횡단면방향 웨이크 필드의 효과를 기술한다. 행렬 $\mathcal{A}$ 와 $\mathcal{R}$ 은 두가지 중요한 성질을 가진다. 첫째, 행렬들은 symplectic하다. 둘째, 서로 교환 가능하다. 두번째 성질에서 부터 우리는 n_z 번째 싱크로트론 주기에서 수송 행렬을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathcal{M}^{n_z} \approx \mathcal{A}^{n_z} \mathcal{R}^{n_z}. \quad (15.125)$$

이제, 행렬 $\mathcal{A}$ 와 $\mathcal{R}$ 가 symplectic하다는 점을 이용하면, 우리는 행렬의 고유값으로 부터 거시입자들의 운동의 안정성을 결정할 수 있게된다. 만약 저장링의 빔동역학이 웨이크 필드가 없는 상황에서 안정하다면, $\mathcal{R}$ 의 고유값의 절대값은 반드시 1 여야 한다. 거시입자 운동의 안정성은 따라서 $\mathcal{A}$ 의 고유값들에 의존하게 된다. 이 고유값들은

$$\text{eigenvalues}(\mathcal{A}) = 1 - \frac{A^2}{2} \pm i \frac{A}{2} \sqrt{4 - A^2} \quad (15.126)$$

이다. $\mathcal{A}$ 의 고유값는 다음의 조건에서 복소수이고 그 절대값이 1(즉, 안정된 운동)이다.

$$|A| < 2. \quad (15.127)$$

그렇지 않다면 고유값은 실수가 된다. 웨이크 필드가 있는 경우에 빔이 안정하게 될 조건은 따라서

$$q^2 N_b \frac{|W_{\perp}(-\sigma_z)|}{|k_z| k_{\beta} E_0 C_0} < 2. \quad (15.128)$$

행렬 $\mathcal{M}$ 은 두 거시입자의 횡단면 방향 변수들의 싱크로트론 한 주기 동안의 수송 행렬이다. $\mathcal{M}$ 의 고유값들은 횡단면 방향 진동에 대해 각각의 정규 모드의 싱크로트론 한 주기 동안의 위상 변화를 나타낸다. 정규 모드는 자체는 $\mathcal{M}$ 의 고유벡터로부터 구성된다. $\mathcal{M}$ 은 symplectic이기 때문에 (즉, $\det \mathcal{M} = 1$) 고유값들은 서로 역수인 쌍으로 나타나고, 따라서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{eigenvalues}(\mathcal{M}) = e^{\pm 2\pi i \Omega_n / \omega_z}. \quad (15.129)$$

여기서 Ω_n 은 모드 n 의 진동 주파수이고, $\omega_z \approx k_z c$ 는 싱크로트론 주파수이다. 이 모형에서는 단 2개의 거시입자만 있기 때문에, 2개의 모드가 존재하고, 따라서, 2개의 서로 독립적인 진동주파수만 존재한다.

웨이크 필드가 없는 경우에는 ($W_{\perp}(z) = 0$), 두 모드 주파수가 같다.

$$\Omega_n = \omega_{\beta}. \quad (15.130)$$

여기서 $\omega_{\beta} = k_{\beta} c$ 는 베타트로 진동 주파수이다. 모드들은 두 거시입자가 베타트론 주파수로 진동하는 것에 해당한다. 한 모드는 위상차가 0이고, 다른 하나는 위상차가 π 이다.

파라미터 A 가 증가하면 (예를 들어, 번치 전하를 늘려서), 모드 주파수들은 베타트론 주파수에서부터 다른 값으로 변화하게 된다. 한 모드는 주파수가 증가하고, 다른 하나는 감소하여, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Omega_n = \omega_{\beta} \pm \Delta\omega_{\beta}. \quad (15.131)$$

이러한 모드 주파수의 거동은 그림 15.6에서도 관찰할 수 있다. 여기서 우리는 Ω_n 을 A 의 함수로 그린 것이다. 만약 A 의 값이 2에 접근하면, 모드 주파수들은 다음의 값에 접근하게 된다.

$$\Omega_n = \omega_{\beta} \pm \frac{1}{2} \omega_z. \quad (15.132)$$

만약 A 의 값이 더 증가하게 되면, 모드 주파수 Ω_n 들의 실수부는 더이상 변화하지 않고, 다만 모드 주파수 Ω_n 은 허수부를 가지게 되는데, 이 허수부는 각각의 모드 진동의 지수적 증폭 또는 감쇠를 기술하게 된다. 베타트론 진폭의 지수적 증가는 빔불안정성을 나타낸다. 빔불안정성은 번치내의 입자수가 특정한 임계값을 넘을 때 발생한다. 그 임계값은 다음과 같이 주어진다.

$$N_b = \frac{2|k_z| k_{\beta} E_0 C_0}{q^2 |W_{\perp}(-\sigma_z)|}. \quad (15.133)$$

임계값 이상에서, 베타트론 진동은 매우 빠르게 증폭될 수 있다. 이런 맥락에서, 이 빔불안정성은 *빠른 머리-꼬리 빔불안정성 (fast head-tail instability)*라고 알려져 있다.

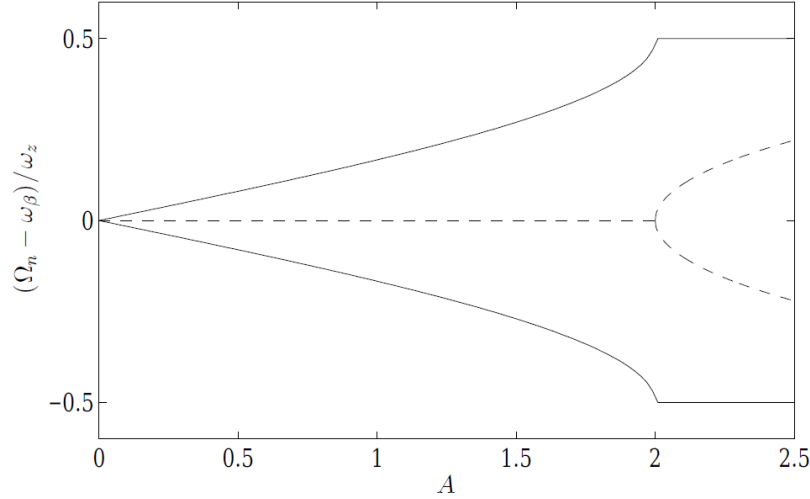


그림 15.6: 식 (15.113)의 파라미터 A 의 함수로 나타낸 머리-꼬리 모드의 주파수들. 파라미터 A 는 횡단면 방향 웨이크 필드와 저장링 파라미터의 특성을 나타낸다. 실선은 모드 주파수 Ω_n 의 실수부를 나타내고, 파선은 허수부(머리-꼬리 진동 진폭의 증가율 또는 감쇠율에 해당)를 나타낸다. 웨이크 필드가 없는 경우에는 머리-꼬리 모드들의 주파수는 베타트론 주파수 ω_β 와 같아진다. $A \geq 2$ 인 경우에는 머리-꼬리 모드들의 주파수가 베타트론 주파수에서 싱크로트론 주파수의 절반만큼 달라진다.

머리-꼬리 빔불안정성

지금까지 우리는, 저장링 안의 입자가 싱크로트론 진동을 하면서 변치안에서의 빔진행 방향 위치뿐만 아니라 입자의 에너지도 변화한다는 점을 무시해왔다. 일반적으로는 입자의 베타트론 진동 주파수는 그 에너지에 의존한다.

$$k_\beta = k_{\beta 0} + \xi \delta + O(\delta^2). \quad (15.134)$$

여기서, δ 는 에너지 편차, $k_{\beta 0}$ 는 에너지 편차가 없는 입자의 베타트론 파수 ($= \omega_\beta/c$)이고, ξ 는 색수차이다. 싱크로트론 저장링에서는, 자연 색수차(즉, 이극자석과 사극자석만 고려한 격자에서 나타나는 색수차)가 항상 음수이고, 따라서 색수차는 충분히 커서 상당한 베타트론 주파수의 퍼짐을 만들어 낼 수 있다. 하지만, 보통은 육극자석들을 이용하여 색수차를 보정하여 0이거나 0에 가깝게 만든다. 저장링에서 색수차를 보정하는데에는 두가지 이유가 있다. 첫째는 베타트론 주파수의 퍼짐을 줄여서 튠 공간에서 공명을 만나는 것을 피하기 위함이다. 둘째, 색수차가 0이 아닐 때는, 빠른 머리-꼬리 빔불안정성과 연관되어 있는 (하지만 그 성질은 다른), 어떤 불안정성을 야기한다. 이렇게 색수차와 관련이 있는 빔불안정성[간단히, 머리-꼬리 빔불안정성(head-tail instability)으로 알려진]을 이번 절의 남은 부분에서 논의하기로 한다.

논의를 진행하기 위해 다음과 같은 복소수를 정의하면 편리하다.

$$\bar{x} = \frac{x}{\sqrt{\beta_x}} + i\sqrt{\beta_x}p_x. \quad (15.135)$$

Smooth-focusing 근사하에서 (즉, 베타함수가 일정한 경우), $\bar{x}$ 는 action-angle 변수 J_x 및 ϕ_x 와 다음과 같이 연결되어 있다.

$$\bar{x} = \sqrt{2J_x}e^{-i\phi_x}. \quad (15.136)$$

즉, $p_x = x' = (\sqrt{\beta_x}\sqrt{2J_x}\cos\phi_x)' = -\frac{\sqrt{2J_x}}{\sqrt{\beta_x}}\sin\phi_x$ 임을 알 수 있다. 거시입자 1 및 2에 각각 대응되는 복소변수 $\bar{x}_1$ 및 $\bar{x}_2$ 를 사용하여, 운동방정식 (15.109)–(15.112)는 다음과 같이 근사될 수 있다.

$$\frac{d\bar{x}_1}{ds} = -ik_\beta\bar{x}_1, \quad (15.137)$$

$$\frac{d\bar{x}_2}{ds} = -ik_\beta\bar{x}_2 + \frac{1}{2}iAk_z\sin(k_zs)\bar{x}_1. \quad (15.138)$$

여기서 우리는

$$k_\beta = \frac{d\phi_x}{ds} = \frac{1}{\beta_x} = \text{const.} \quad (15.139)$$

을 이용하였다. 거시입자에 작용하는 힘이 x 의 변화율과 p_x 의 변화율에 배분되어진다는 면에서 식 (15.137) 및 (15.138)은 근사적이다. 방정식 (15.109)–(15.112)에서는 힘을 나타내는 항들은 p_x 의 변화율에만 나타난다. 하지만, 식 (15.137)은 식 (15.109) 및 (15.110)이 주는 해와 같은 해를 주고, 식 (15.138)은 식 (15.111) 및 (15.112)가 나타내는 물리적 결론과 같은 결론을 준다. 지금 부터 이러한 부분을 살펴보기로 하자.

식 (15.137) 및 (15.138)의 해는 수송 행렬을 이용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_{s+\Delta s} = e^{-ik_\beta\Delta s} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}iA(1-\cos(k_z\Delta s)) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_s. \quad (15.140)$$

하나의 싱크로트론 반주기에 대해(거시입자 1이 거시입자 2에 앞서 있는 상황), 수송 행렬은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_{s=\pi/|k_z|} = e^{-\pi ik_\beta/|k_z|} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ iA & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_{s=0}. \quad (15.141)$$

두번째 싱크로트론 반주기에 대해(거시입자 2가 거시입자 1에 앞서 있는 상황)서는

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_{s=2\pi/|k_z|} = e^{-\pi ik_\beta/|k_z|} \begin{pmatrix} 1 & iA \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_{s=\pi/|k_z|}. \quad (15.142)$$

싱크로트론 주기의 전반과 후반의 수송 행렬을 곱하면, 우리는 하나의 싱크로트론 주기 전체에 대한 수송 행렬을 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_{s=2\pi/|k_z|} = \bar{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_{s=0}. \quad (15.143)$$

여기서, 행렬 $\mathcal{M}$ 은

$$\bar{\mathcal{M}} = \bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{R}} \quad (15.144)$$

이고,

$$\bar{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 - A^2 & iA \\ iA & 1 \end{pmatrix}, \quad (15.145)$$

$$\bar{\mathcal{R}} = e^{-2\pi i k_\beta / |k_z|}. \quad (15.146)$$

행렬 $\bar{\mathcal{A}}$ 의 고유값들은 행렬 $\mathcal{A}$ 의 고유값 식 (15.126)과 같다. 따라서, 우리가 실변수 $(x_1, p_{x1}$ 및 $(x_2, p_{x2}$ 을 쓰던, 아니면 복수 변수 $\bar{x}_1$ 및 $\bar{x}_2$ 을 쓰던, 시스템의 모드 및 안정성에 대해서는 같은 결론에 다다르게 된다.

복소 변수를 이용하게 되면, 색수차의 효과를 고려하는 것이 상대적으로 단순화된다. 먼저 거시입자 1의 운동방정식을 싱크로트론 진동의 전반 주기에 대해 고려하자. 즉, 거시입자 1이 거시입자 2에 앞서 있는 상황이다. 베타트론 위상은 변화율은

$$\frac{d\phi_{x1}}{ds} = (1 + \xi\delta_1(s))k_\beta \quad (15.147)$$

이다. s 에 대해 적분을 수행하면, 우리는 s 에서 $s + \Delta s$ 까지의 위상 변화를 다음과 같이 얻는다.

$$\Delta\phi_{x1} = k_\beta s + \xi k_\beta \int_s^{s+\Delta s} \delta_1(s) ds. \quad (15.148)$$

거시 입자 1의 빔진행 방향 좌표계 z_1 에 대한 운동방정식은 (거시 입자 1이 싱크로트론 운동을 하므로) 다음과 같다.

$$\frac{d}{ds} z_z(s) = -\eta_p \delta_1(s). \quad (15.149)$$

여기서 η_p 는 위상 미끄럼 인자이다. 식 (15.148) 및 (15.149)를 이용하면, 우리는 적분을 수행하여 다음을 얻는다.

$$\Delta\phi_{x1} = k_\beta s - \frac{\xi k_\beta}{\eta_p} (z_1(s + \Delta s) - z_1(s)). \quad (15.150)$$

따라서, 색수차가 있는 저장링에서는, 링의 임의의 부분을 지나면서 생기는 베타트론 위상차를 (에너지 변화에 대한 명시적인 의존성없이) 빔진행 방향 좌표계의 변화로 표현할 수 있게 된다. 싱크로트론 주기의 전반을 지나고 나면, $z_1 = 0$ 에서 출발한 입자의 최종 빔진행 방향 좌표는 역시 $z_1 = 0$ 이 된다. 따라서, 싱크로트론 전체 한 주기를 지나고 나면, 베타트론 위상 변화는 색수차에 무관하게 된다.

따라서, 우리는 두 개의 거시 입자로 이루어진 이론 모델에 색수차의 효과를 다음과 같은 운동방정식으로 포함할 수 있다. 싱크로트론 주기의 전반에 대해, 거시 입자 1은 웨이크에 의한 알짜 힘은 받지 않는다. 식 (15.136)을 적용하고, 위상 변화에 대해서는 식 (15.150)을 사용하면,

$$\bar{x}_1(s + \Delta s) = \exp \left(-ik_\beta \Delta s + i \frac{\xi k_\beta}{\eta_p} \Delta z_1 \right) \bar{x}_1(s). \quad (15.151)$$

다음을 가정하면,

$$\left| \frac{\xi k_\beta}{\eta_p} \Delta z_1 \right| \ll 1, \quad (15.152)$$

우리는 다음과 같은 근사를 쓸 수 있다.

$$\bar{x}_1(s + \Delta s) \approx e^{-ik_\beta \Delta s} \left(1 + i \frac{\xi k_\beta}{\eta_p} \Delta z_1 \right) \bar{x}_1(s). \quad (15.153)$$

거시 입자 2에 대한 운동방정식은, 싱크로트론 주기 전반 동안 거시 입자 1의 웨이크 필드로 부터 힘을 받기때문에, 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d\bar{x}_2}{ds} = -ik_\beta \bar{x}_2 + \frac{1}{2} i A k_z \sin(k_z s) e^{-ik_\beta s} \left(1 + i \frac{\xi k_\beta}{\eta_p} z_1(s) \right) \bar{x}_1(0). \quad (15.154)$$

식 (15.154)의 우변의 첫번째 항에서 우리는 색수차의 효과를 무시하였다. 이런식으로 근사를 할 수 있는 이유는, 이 항은 일반적인 베타트론 진동을 나타내고, 또 식 (15.150)로부터 싱크로트론 반주기 이후에 $z_2 = 0$ 에서 출발한 베타트론 위상 변화는 색수차에 무관하게 된다는 점에서 정당화될 수 있다. 다르게 말하면, 통상적인 베타트론 진동에 대한 색수차의 효과는 평균되어 0이 된다는 것이다. 하지만, 식 (15.154)의 우변의 두번째 항은 벌써 $\sin(k_z s)$ 항을 포함하고 있는데, 이것은 두 거시 입자사의 빔 진행 방향 거리의 변화에서 기인한다. 이 항이 의미하는 것은 색수차의 효과가 여기서는 싱크로트론 반주기 이후에도 0으로 평균되지 않는다는 것이다.

다음을 이용하면,

$$z_1(s) = \sigma_z \sin(|k_z|s), \quad (15.155)$$

우리는 식 (15.154)가 $0 < s < \pi/|k_z|$ 에 대해 다음의 해를 가짐을 알 수 있다.

$$x_2(s) = e^{-ik_\beta s} x_2(0) + \frac{1}{2} i A \left(1 - \cos(k_z s) + i \frac{\xi \delta_z}{2\eta_p} \left(|k_z|s - \frac{1}{2} \sin(2|k_z|s) \right) \right) e^{-ik_\beta s} x_1(0). \quad (15.156)$$

$s = \pi/|k_z|$ 로 놓으면, 거시 입자 1과 2의 위상공간 좌표계는 싱크로트론 반주기를 지나고 나서 다음과 같은 수송 행렬을 이용하여 표현할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_{s=\pi/|k_z|} = e^{-\pi i k_\beta / |k_z|} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i A_\xi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_{s=0}. \quad (15.157)$$

여기서,

$$A_\xi = A \left(1 + i \frac{\pi}{4} \frac{\xi}{\eta_p} k_\beta \sigma_z \right). \quad (15.158)$$

싱크로트론 진동의 후반 주기에 대해 (즉, 거시입자 2가 거시입자 1에 앞서 있는 경우) 수송 행렬은

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_{s=2\pi/|k_z|} = e^{-\pi i k_\beta / |k_z|} \begin{pmatrix} 1 & i A_\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_{s=\pi/|k_z|}. \quad (15.159)$$

따라서, 싱크로트론 진동의 전체 한 주기에 대해서 수송 행렬은

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_{s=2\pi/|k_z|} = \bar{\mathcal{A}}_\xi \bar{\mathcal{R}} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}_{s=0} \quad (15.160)$$

이고, 여기서 $\bar{\mathcal{R}}$ 는 식 (15.146)으로 주어지고,

$$\bar{\mathcal{A}}_\xi = \begin{pmatrix} 1 - A_\xi^2 & iA_\xi \\ iA_\xi & 1 \end{pmatrix}. \quad (15.161)$$

식 (15.160)은 A 가 A_ξ 로 바뀐 것만 빼고는 식 (15.143)과 같다. A_ξ 의 허수부가 의미하는 것은 행렬 $\bar{\mathcal{A}}_\xi$ 의 고유값들의 절대값이 더이상 1이 아니라는 이야기다. A 가 작은 값인 경우,

$$\text{eigenvalues}(\bar{\mathcal{A}}_\xi) \approx e^{\pm iA_\xi} = e^{\pm iA} e^{\mp \text{Im} A_\xi}. \quad (15.162)$$

고유값 e^{+iA_ξ} 에 해당되는 모드는 만약 $\xi/\eta_p > 0$ 이면 감쇠하고, $\xi/\eta_p < 0$ 이면 증폭된다. 반대로, 고유값 e^{-iA_ξ} 에 해당되는 모드는 만약 $\xi/\eta_p < 0$ 이면 감쇠하고, $\xi/\eta_p > 0$ 이면 증폭된다. 만약, 색수차 ξ 가 정확하게 0이 아니라면, 항상 하나의 증폭 그리고 하나의 감쇠 모드가 생기게 된다. 어떤 모드가 감쇠될 것인지는 색수차의 부호, 그리고 저장링이 above transition 인지 below transition 인지에 달려있다. 예를 들어, above transition에서 ($\eta_p > 0$) 고유값 e^{+iA_ξ} 을 가지는 모드는 색수차가 양수일때 감쇠하고, 음수일때 증폭한다. 증폭률 및 감쇠율은 A_ξ 의 허수부에 싱크로트론 주파수를 곱해서 얻어진다.

이러한 해석을 통해 색수차가 0이 아닌 경우 항상 빔불안정성이 나타나는 것처럼 보인다. 이러한 빔불안정성은 머리-꼬리 빔불안정성 (*head-tail instability*)으로 알려져 있다. 머리-꼬리 빔불안정성은 앞서 논의 했던 빠른 머리-꼬리 빔불안정성과 달리 임계값이 없고, 어떠한 빔전류 값에 대해서도 색수차가 (그리고 횡단면 방향 웨이크 필드가) 0이 아닌 경우 발생하게 된다. 다행히도, 실제 저장링 운전에서 머리-꼬리 빔불안정성을 완화하기 위하여 색수차를 정확하게 0으로 맞추는 필요는 없다. 보통 색수차를 (육극자석을 이용하여) 충분히 작게 만들면 다른 감쇠 기작들이 (예를 들어 싱크로트론 방사에 의한 감쇠 또는 결핵짐 등) 머리-꼬리 진동의 진폭이 증가하는 것을 억제토록 하는 것이 가능하다. 또한, 이번 절에서 기술한 간단한 두 거시입자 모형은 불안정성의 증폭률을 다소 과대평가한 면이 있다. Vlasov 방정식(번치 안의 전하를 연속적인 분포로 취급)에 기반을 둔 좀더 엄밀한 모형을 사용하면 더 정확한 불안정성 증폭률을 예측할 수 있다. 그리고, 양의 색수차와 음의 색수차에 대해, 불안정성 증폭율에 있어서 약간의 비대칭성이 있음도 알려져 있다. 따라서, below transition으로 운전중인 저장링에 대해서는, 약간 음의 색수차로 운전하는 것이 유리하고, above transition인 경우에는 약간 양의 색수차로 운전하는 것이 좋다. 우리는 빔진행 방향 빔불안정성에 대한 해석을 Vlasov 방정식을 사용하여 다음 절들에서 논의할 것이다. Vlasov 방정식을 이용하여 횡단면 방향 빔불안정성을 다룬 내용은 Chao의 책에서 찾아볼 수 있다.

4.2 Sacherer의 적분 방정식

15장 3절에서 우리는 마이크로파 빔불안정성을 논의하였다. 이 불안정성을 통해 빔의 작은 밀도 변조가 저장링의 임피던스에 의해 지수적으로 증가하게 된다. 우리의 이론 모델은 번치가 안된 빔을 바탕으로 했다. 따라서, 싱크로트론 진동이 없었고, 입자의 에너지의 변화는 진공 챔버에 유도되는 웨이크 필드로부터만 기인했다. Vlasov 방정식을 이용하여 위상공간에서의 빔 분포의 전개를 기술하면, 우리는 밀도 변조의 진폭이 어떤 조건에서 지수적으로 증가하게 될지를 유도하였다. 엄밀히 말해서, 이 모델을 따르는 빔 안정성의 기준은 번치가 안된 관성운동 빔에만 적용이 되어야 한다. 그럼에도 불구하고, 밀도 변조의 파장이 번치의 길이에 비해 작다면, 그리고, 불안정성의 증폭률이 싱크로트론 주파수에 비해 크다면, 빔 안정성에 대한 조건을 번치된 경우로도 일반화할 수 있다.

하지만, 빔불안정성은 관성운동 빔으로 취급할 수 없는 번치 빔 상황에서도 당연히 일어난다. 특별히, 번치 길이 정도의 밀도 변조는 장치의 임피던스에 의해 매우 큰 진폭으로 전개될 수 있다. 이러한 빔불안정성을 기술하고, 특히 어떤 조건들에서 일어나는지를 이해하려면, 우리는 기존의 해석들을 다시한번 들여다 봐야 하고, 기본적인 빔의 거동에 대해 다소 다른 초기 가정을 해야한다. 이번 절, 그리고 4.3 절 및 4.4 절에서 우리의 목표는 15장 3 절과 유사한 해석을 수행하되, 섭동이 안된 초기 빔분포가 전체 저장링을 통해 균일하다고 가정하는 것이 아니라, 번치가 되어 있는 빔분포(그리고 입자들은 싱크로트론 운동을 수행)를 이용하여 해석을 하는 것이다. 빔분포의 전개는 여전히 Vlasov 방정식으로 기술되기 때문에, 밀바탕에 깔린 물리 현상은 근본적으로 같다. 우리는 다시 빔분포를 주어진 밀도 분포(임피던스가 없는 상태에서의 평형 분포에 해당)를 이용하여 기술하기로 하고, 이 위에 작은 변조를 중첩시킨다. 만약, 밀도 변조가 적절한 형태를 가진다면, 이 변조는 잘 정의된 주파수를 가지고 진동한다. 이 해석에 있어서 첫 단계는 잘 정의된 주파수를 가지는 밀도 변조를 식별해 내는 것이다. 이러한 밀도 변조를 우리는 *모드(mode)*라고 부른다. 그다음 단계는 각 모드의 주파수를 식별하는 것이다. 보통의 경우와 같이, 주파수의 허수부는 어떤 모드가 감쇠할지 증폭할지를 나타낸다. 만약 어느 모드라도 증폭하면, 빔은 불안정해질 수 있다. 우리는 모드 주파수가 빔전류에 의존함을 알게될 것이고, 빔전류가 증가하면, 서로 다른 두 모드 주파수의 실수부가 같은 값에 근접하게 됨을 볼 것이다. 빔불안정성은 이렇게 서로 다른 두 모드 주파수의 실수부가 같은 값을 가지는 것과 연관이 되어있는데, 따라서 이런 형태의 빔불안정성은 *모드-결합 빔불안정성(mode-coupling instability)*라고 알려져 있다.

이번 절에서, 우리는 목표는 Vlasov 방정식에서 출발하여 Sacherer의 적분 방정식을 유도하는 것이다.⁶ Sacherer의 적분 방정식은, 섭동의 주파수와 섭동을 구성하는 밀도 변조의 파장을 서로 연관짓는다는 점에서, 분산 방정식 (15.78)과 비슷한 역할을 한다. 하지만, 여기에서는 시작부터 빔이 번치되어 있다는 것(그리고 입자들은 싱크로트론 진동을 한다는 것)을 고려한다. 이전 논의에서는 관성운동 빔의 경우에 얻은 결과를 추후에 번치된 빔으로 일반화하는 방식을 시도했었다.

⁶F. J. Sacherer, Methods for computing bunched-beam instabilities, Tech. Rep. CERN/SI-BR/72-5 (1972).

우리는 빔진행 방향 위상공간의 정준 좌표계 z 및 δ 를 사용하기로 한다. 여기서, z 는 입자의 빔진행 방향 위치를 기준 입자에 대해 상대적으로 나타낸 좌표계이고, δ 는 켈레 운동량으로 에너지 편차를 나타낸다. 이러한 변수를 가지고, 빔진행 방향 위상공간 밀도 $\Psi(z, \delta; s)$ 는 다음과 같은 Vlasov 방정식에 따라 전개되어 나간다.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{dz}{ds} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{d\delta}{ds} \frac{\partial \Psi}{\partial \delta} = 0. \quad (15.163)$$

여기서 s 는 독립변수로서 저장링의 기준 궤적을 따라 측정되는 거리이다. 위상 미끄럼, RF 집속, 그리고 웨이크 필드를 포함하면, 단일 입자의 동역학 변수 z 와 δ 는 다음의 운동방정식에 의해 전개되어 간다.

$$\frac{dz}{ds} = -\eta_p \delta, \quad (15.164)$$

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{\omega_z^2}{\eta_p c^2} z + \frac{qV(z; s)}{E_0 C_0}. \quad (15.165)$$

여기서, η_p 는 위상 미끄럼 인자이고, ω_z 는 싱크로트론 주파수, E_0 는 기준 에너지, 그리고 C_0 는 링의 둘레(즉, 기준 궤적의 전체 길이)이다. 싱크로트론 주파수는 싱크로트론 위상과 다음의 관계를 갖는다.

$$\omega_z = \beta_0 c \frac{d\phi_z}{ds}. \quad (15.166)$$

여기서, $\beta_0 c$ 는 기준 입자의 속력이다. 우리는 초상대론적 한계 $\beta_0 \rightarrow 1$ 를 사용할 것이다. 우리가 흔히 채택하는 싱크로트론 위상의 정의에 따라 [식 (5.64) 및 (5.65)에 주어진 것 처럼], 만약 $\eta_p > 0$ 이면 $\omega_z < 0$ 이다. 즉, 저장링이 above transition으로 운전되면 싱크로트론 주파수가 음수이다. (주: ϕ_z 는 반시계 방향으로 돌고, δ 가 양수 일때 오히려 z 는 줄어든다.)

포텐셜 $V(z; s)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$V(z; s) = - \int_z^\infty \lambda(z'; s) W_{\parallel}(z - z') dz'. \quad (15.167)$$

여기서, $W_{\parallel}(z)$ 는 빔진행 방향 웨이크 필드이고, $\lambda(z)$ 는 빔진행 방향 전하 분포로서 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda(z; s) = - \int_{-\infty}^\infty \Psi(z, \delta; s) d\delta. \quad (15.168)$$

우리는 ‘0의 주파수’ 모드가 있다고 가정한다. 즉, 다음과 같이 Vlasov 방정식의 해로서 분포 함수 $\Psi(z, \delta; s)$ 가 독립변수 s 에 대한 명시적인 의존성이 없는 모드를 가정한다.

$$\Psi(z, \delta; s) = \Psi_0(z, \delta). \quad (15.169)$$

$\partial \Psi_0 / \partial s = 0$ 을 적용하고, 식 (15.164) 및 (15.165)을 이용하면, Vlasov 방정식 (15.163)은 다음과 같은 형태에 이르게 된다.

$$-\eta_p \delta \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} + \frac{\omega_z^2}{\eta_p c^2} z \frac{\partial \Psi_0}{\partial \delta} + \frac{qV(z)}{E_0 C_0} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \delta} = 0. \quad (15.170)$$

식 (15.170)은 좀더 일반화된 형태의 Haissinski 방정식 (15.62)이다. 당분간은 빔이 Gaussian 형태의 에너지 퍼짐을 가진다고 가정하자. 그리고, 빔진행 방향 좌표계와 에너지 편차 사이에 어떠한 상관관계도 없다고 생각하자. 그렇다면, 분포 함수 Ψ_0 는 다음의 형태로 쓸 수 있다.

$$\Psi_0(z, \delta) = \frac{e^{-\delta^2/2\sigma_\delta^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_\delta} \lambda_0(z). \quad (15.171)$$

식 (15.171)의 Ψ_0 를 식 (15.170)에 대입하면,

$$\frac{d\lambda_0(z)}{dz} = -\frac{\omega_z^2}{\eta_p^2 c^2 \sigma_\delta^2} z \lambda_0(z) - \frac{qV(z)}{\eta_p \sigma_\delta^2 E_0 C_0} \lambda_0(z). \quad (15.172)$$

포텐셜 우물의 왜곡을 기술하는 식 (15.62)는 위의 식 (15.172)의 하나의 해가 됨을 볼 수 있다.

이제 다시 좀더 일반적인 경우(즉, 에너지 퍼짐에 대해 어떤 특정한 형태도 가정하지 않는)로 돌아가 보자. 정상상태의 해에 작은 섭동을 가정하면, 위상공간 밀도 $\Psi(z, \delta; s)$ 는 작은 $\Delta\Psi$ 에 대해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Psi(z, \delta; s) = \Psi_0(z, \delta) + \Delta\Psi(z, \delta) e^{-i\Omega s/c}. \quad (15.173)$$

만약 $\Psi_0(z, \delta)$ 가 $\Delta\Psi \rightarrow 0$ 의 극한에서 Vlasov 방정식을 만족한다면 (즉, 우리가 포텐셜 우물 왜곡의 효과를 고려한다면) 식 (15.173)을 Vlasov 방정식 (15.163)에 대입하고 섭동의 일차항까지만 취하면, 다음의 식을 얻게 된다.

$$-i\frac{\Omega}{c}\Delta\Psi - \eta_p \delta \frac{\partial \Delta\Psi}{\partial z} + \frac{\omega_z^2}{\eta_p c^2} z \frac{\partial \Delta\Psi}{\partial \delta} + \frac{q\Delta V(z)}{E_0 C_0} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \delta} + \frac{qV_0(z)}{E_0 C_0} \frac{\partial \Delta\Psi}{\partial \delta} = 0. \quad (15.174)$$

여기서,

$$V_0(z) = -\int_z^\infty \lambda_0(z') W_{\parallel}(z - z') dz', \quad (15.175)$$

$$\Delta V(z) = -\int_z^\infty \Delta\lambda(z') W_{\parallel}(z - z') dz', \quad (15.176)$$

그리고,

$$\Delta\lambda(z') = \int_{-\infty}^\infty \Delta\Psi(z', \delta) d\delta. \quad (15.177)$$

주파수 Ω 는 위상공간 전하 밀도에 있는 섭동의 진동 주파수이고, 이때 위상공간 밀도는 z 및 δ 에 대해 어떤 특정한 의존성을 가진다. 주어진 분포 Ψ_0 에 대해, 미분방정식 (15.174)은 어떤 특정한 형태의 섭동 $\Delta\Psi(z, \delta)$ 만을 해로 가진다. 우리의 목표는 이러한 섭동을 찾는 것이고, 이에 해당되는 주파수 Ω 를 얻는 것이다. 만약, 허수부가 양수인 주파수가 있다면, 이에 해당되는 섭동은 불안정하게 될 것이다. 즉, 시간에 대해 지수함수적으로 증가하게 된다. 식 (15.174)의 해를 찾기위해, 먼저 이 식을 다루기 쉬운 형태로 변형시켜야 한다. 이번 절의 남은 부분에서는 Sacherer의 적분방정식으로 알려진 적분방정식을 어떻게 유도하는지를 보일 것이다. 이 후, 15장 4.3 절 및 4.4 절에서는 Sacherer의 적분방정식의 해를 논의할 것이다.

식 (15.174)에는 $\partial\Delta\Psi/\partial\delta$ 에 대한 두개의 항이 있다. 웨이크 함수와 섭동의 형태에 따라, 포텐셜 $V(z)$ 는 z 에 대한 선형 함수로 근사될 수 있을 것이다. 따라서, $\partial\Delta\Psi/\partial\delta$ 에 대한 두개의 항은 $\bar{\omega}_z$ 를 정의하여 하나로 합칠 수 있다.

$$\frac{\bar{\omega}_z^2}{\eta_p c^2} = \frac{\omega_z^2}{\eta_p c^2} + \frac{q}{E_0 C_0} \frac{dV_0(z)}{dz} \Big|_{z=0}. \quad (15.178)$$

여기서, 빔진행 방향에 대해 작용-각(action-angle) 변수 J_z 및 ϕ_z 를 도입하면 편리하다. 이 변수들은 식 (5.64) 및 (5.65)와 마찬가지로 다음과 같이 정의된다.

$$z = \sqrt{2\beta_z J_z} \cos \phi_z, \quad (15.179)$$

$$\delta = -\sqrt{\frac{2J_z}{\beta_z}} \sin \phi_z. \quad (15.180)$$

여기서, β_z 는 빔진행 방향 Courant-Snyder 베타함수이다. 우리는 빔진행 방향 Courant-Snyder 알파 함수는 $\alpha_z = 0$ 으로, 즉, β_z 가 근사적으로 일정하다고 가정한다. 이러한 근사는 빔진행 방향 집속이 그다지 크지 않는 경우에 유효하다. β_z 의 값은 빔진행 방향 위상공간에서 단일 입자가 그리는 타원의 형태로 부터 결정이 된다. 웨이크 필드가 없는 경우, 빔진행 방향 운동방정식 (15.164) 및 (15.165)은 다음의 해밀토니안으로부터 유도된다.

$$H = -\frac{\eta_p}{2} \delta^2 - \frac{\omega_z^2}{2\eta_p c^2} z^2. \quad (15.181)$$

해밀토니안은 운동의 상수이기 때문에, 다음의 식이 성립된다.

$$\beta_z = \frac{\sqrt{2\beta_z J_z}}{\sqrt{\frac{2J_z}{\beta_z}}} = \frac{z_{\max}}{\delta_{\max}} = -\frac{\eta_p c}{\omega_z}. \quad (15.182)$$

윗 식에서, $-$ 부호는 $\eta_p/\omega_z < 0$ 이기 때문에 나타나게 되었다. 웨이크 필드가 있는 경우에는, 식 (15.182)의 ω_z 를 식 (15.178)의 $\bar{\omega}_z$ 로 치환하면 된다. 식 (15.178), (15.179), (15.180) 및 (15.182)을 이용하면, 식 (15.174)는 다음과 같이 변형된다.

$$-i\frac{\Omega}{c}\Delta\Psi + \frac{\bar{\omega}_z}{c} \frac{\partial\Delta\Psi}{\partial\phi_z} + \frac{q\Delta V(z)}{E_0 C_0} \frac{\partial\Psi_0}{\partial\delta} = 0. \quad (15.183)$$

여기서 Ψ_0 는 불변 분포이기 때문에, 위 식은 J_z 만의 함수이다. 즉, ϕ_z 에 대한 명시적 의존성이 없다. 따라서, 우리는 Ψ_0 의 δ 에 대한 미분을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial\delta} = \frac{\partial J_z}{\partial\delta} \frac{\partial\Psi_0}{\partial J_z} = -\sqrt{2\beta_z J_z} \sin \phi_z \frac{\partial\Psi_0}{\partial J_z}. \quad (15.184)$$

식 (15.175) 및 (15.176)은 저장링에서 웨이크 필드가 하나의 회전 주기 안에 완전히 감쇠되는 경우에만 유효하다. 어떤 경우에는 웨이크 필드가 회전 주기보다 훨씬 오래동안 유지되는 것도 가능하다. 이 경우에 우리는 저장링의 이전 턴에서 번치가 발생시킨 웨이크 필드도 고려를 해야 한다. 이것은 턴수를 나타내는 첨자 k 에 대한 급수 합을 포함함으로써 이루어질 수 있다.

$$\Delta V(z) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_z^{z+C_0} \Delta\lambda(z') e^{i\Omega k C_0/c} W_{\parallel}(z - z' - kC_0) dz'. \quad (15.185)$$

인자 $e^{i\Omega k C_0/c}$ 은 위상공간 밀도 섭동의 서로 다른 턴에 대한 위상을 나타낸다. 또한, $\Delta V(z)$ 를 웨이크 함수가 아닌 임피던스로 표현하면 편리한데, 이것은 다음을 이용하면 가능하다.

$$\Delta\lambda(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta\tilde{\lambda}(\omega) e^{i\omega z/c} d\omega \quad (15.186)$$

$$W_{\parallel}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_{\parallel}(\omega) e^{i\omega z/c} d\omega \quad (15.187)$$

위 식들을 식 (15.185)에 대입하면,

$$\Delta V(z) = -\frac{c}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \Delta\tilde{\lambda}(\omega) Z_{\parallel}(\omega) e^{i\omega z/c} e^{2\pi i k(\Omega - \omega)/\omega_0}, \quad (15.188)$$

이 되고, 여기서 $\omega_0 = 2\pi c/C_0$ 이다. 이제, 식 (15.11)을 이용하면,

$$\Delta V(z) = -\frac{c^2}{C_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Delta\tilde{\lambda}(\Omega_p) Z_{\parallel}(\Omega_p) e^{i\Omega_p z/c}. \quad (15.189)$$

여기서,

$$\Omega_p = \Omega + p\omega_0. \quad (15.190)$$

작용-각 변수를 이용하면,

$$\Delta V = \Delta V(\phi_z, J_z) = -\frac{c^2}{C_0} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Delta\tilde{\lambda}(\Omega_p) Z_{\parallel}(\Omega_p) e^{i\Omega_p \sqrt{2\beta_z J_z} \cos \phi_z/c}. \quad (15.191)$$

$\Delta\Psi$ 의 전개를 기술하는 식 (15.183)은 (c 를 양변에 곱한 후) 이제 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$-i\Omega\Delta\Psi + \bar{\omega}_z \frac{\partial\Delta\Psi}{\partial\phi_z} - \frac{qc}{E_0 C_0} \sqrt{2\beta_z J_z} \sin \phi_z \Delta V \frac{\partial\Psi_0}{\partial J_z} = 0. \quad (15.192)$$

이 식은 일반적으로 풀기가 쉽지 않다. 그다음 단계로, 우리는 섭동을 각도 변수 ϕ_z 의 후리에 모드들로 전개한다. 이것은 $\Delta\Psi$ 가 ϕ_z 에 대해 주기 2π 로 주기적이기 때문에 가능하다.

$$\Delta\Psi(\phi_z, J_z) = \sum_{\ell'=-\infty}^{\infty} R_{\ell'}(J_z) e^{i\ell'\phi_z}. \quad (15.193)$$

윗 식을 식 (15.183)에 대입하면,

$$i \sum_{\ell'=-\infty}^{\infty} R_{\ell'}(J_z) e^{i\ell'\phi_z} (\Omega - \ell'\bar{\omega}_z) + \frac{qc}{E_0 C_0} \sqrt{2\beta_z J_z} \sin \phi_z \Delta V \frac{\partial\Psi_0}{\partial J_z} = 0. \quad (15.194)$$

ℓ' 에 대한 급수합을 제거하기 위해, $e^{-i\ell\phi_z}/2\pi$ 를 양변에 곱한 후, ϕ_z 에 대해 적분을 한다. ΔV 가 가지는 ϕ_z 에 대한 의존성을 고려하면, 우리는 다음의 결과식을 필요로 한다.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\ell\phi_z} \sin \phi_z e^{iu \cos \phi_z} d\phi_z = -i\frac{\ell}{u} J_{\ell}(u). \quad (15.195)$$

여기서, $J_\ell(u)$ 는 베셀 함수이다. ϕ_z 에 대해서 적분을 수행하고 나면, 식 (15.194)는 다음과 같이 변형된다.

$$iR_\ell(J_z)(\Omega - \ell\bar{\omega}_z) + i^\ell \frac{q\ell c^4}{E_0 C_0^2} \frac{\partial \Psi_0}{\partial J_z} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Delta\tilde{\lambda}(\Omega_p) \frac{Z_{\parallel}(\Omega_p)}{\Omega_p} J_\ell\left(\frac{\Omega_p \tilde{z}}{c}\right) = 0. \quad (15.196)$$

여기서, 편의를 위해 우리는 싱크로트론 액션 J_z 를 가지는 입자의 싱크로트론 진동의 진폭 $\tilde{z}$ 을 다음과 같이 정의하였다.⁷

$$\tilde{z} = \sqrt{2\beta_z J_z}. \quad (15.197)$$

그다음 단계는 빔전류 스펙트럼 $\Delta\tilde{\lambda}(\omega)$ 를 위상공간 밀도의 섭동 $\Delta\Psi$ (15.193)를 이용하여 나타내는 것이다. 식 (15.177) 및 (15.186)을 이용하면, 우리는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta\tilde{\lambda}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} \int_{-\infty}^{\infty} d\delta e^{-i\omega z/c} \Delta\Psi. \quad (15.198)$$

(z, δ) 와 (ϕ_z, J_z) 는 모두 위상공간 좌표계의 정준 켈레를 이루기 때문에, 하나의 좌표계에서 다른 좌표계로 변환시 그 Jacobian은 1이 된다. 따라서, 적분은 쉽게 ϕ_z 및 J_z 의 적분으로 변환된다. 이제, 식 (15.193)에 주어진 $\Delta\Psi$ 를 대입하면,

$$\Delta\tilde{\lambda}(\omega) = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} d\phi_z \int_0^{\infty} dJ_z e^{-i\omega z/c} \sum_{\ell'=-\infty}^{\infty} R_{\ell'}(J_z) e^{i\ell' \phi_z}. \quad (15.199)$$

여기서, ϕ_z 에 대한 적분은 다음 공식의 도움을 받아 수행될 수 있다.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_z e^{i\ell' \phi_z} e^{-iu \cos \phi_z} = i^{-\ell'} J_{\ell'}(u). \quad (15.200)$$

결과적으로 다음을 얻는다.

$$\Delta\tilde{\lambda}(\omega) = \frac{2\pi i^{-\ell'}}{c} \int_0^{\infty} dJ_z \sum_{\ell'=-\infty}^{\infty} R_{\ell'}(J_z) J_{\ell'}\left(\frac{\omega \tilde{z}}{c}\right). \quad (15.201)$$

그러고 나서, 식 (15.196)의 $\Delta\tilde{\lambda}(\Omega_p)$ 에 대입하면,

$$\begin{aligned} R_\ell(J_z)(\Omega - \ell\bar{\omega}_z) &= i^{1+\ell-\ell'} \frac{q c \omega_0^2 \ell}{2\pi E_0} \frac{\partial \Psi_0}{\partial J_z} \\ &\times \sum_{\ell', p=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} dJ'_z R_{\ell'}(J'_z) \frac{Z_{\parallel}(\Omega_p)}{\Omega_p} J_\ell\left(\frac{\Omega_p \tilde{z}}{c}\right) J_{\ell'}\left(\frac{\Omega_p \tilde{z}'}{c}\right). \end{aligned} \quad (15.202)$$

식 (15.202)는 여전히 취급하기가 어려워 보인다. 하지만, 지배방정식을 모드 주파수 Ω 에 대해 지금처럼 표현하는 것에는 장점이 있는데, 그것은 문제가 고유 시스템을 찾는 것으로 귀착된다는 것이다. 좀더 식을 변형하게되면 이점이 분명해 진다. 먼저, 식 (15.202)을 다음의 형태로 쓴다.

$$\left(\frac{\Omega}{\bar{\omega}_z} - \ell\right) R_\ell(J_z) = \sum_{\ell'=-\infty}^{\infty} W(J_z) \int_0^{\infty} dJ'_z G_{\ell\ell'}(J_z, J'_z) R_{\ell'}(J'_z). \quad (15.203)$$

⁷주: $z = \tilde{z} \cos \phi_z$

여기서, 가중함수를 (단위는 $1/\text{length}^3$) 다음과 같이 정의했다.

$$W(J_z) = -\frac{1}{qN_b\beta_z} \frac{\partial \Psi_0}{\partial J_z}. \quad (15.204)$$

그리고, 핵함수(kernel)는 (단위는 length^2) 다음과 같다.

$$G_{\ell\ell'}(J_z, J'_z) = i^{1+\ell-\ell'} \frac{q^2 N_b c^2 \omega_0^2 \eta_p \ell}{2\pi E_0 \bar{\omega}_z^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_{||}(\Omega_p)}{\Omega_p} J_\ell \left(\frac{\Omega_p \hat{z}}{c} \right) J_{\ell'} \left(\frac{\Omega_p \hat{z}'}{c} \right). \quad (15.205)$$

여기서, β_z 는 빔진행 방향 Courant-Snyder 베타 함수 (15.182)이고, η_p 는 위상 미끄럼 인자이다. 가중함수의 정의 식 (15.204)에 $(-)$ 부호가 도입되었는데, 이것은 보통의 경우, 위상공간에서의 입자 밀도가 빔진행 방향 액션이 증가함에 따라 감소하는데⁸, 가중함수의 값은 양수이기 때문이다.

만약에, 장치 파라미터, 임피던스, 그리고 빔진행 방향 위상공간 분포가 알려져 있다면, 가중함수와 핵함수를 모두 찾을 수 있고, J_z 의 함수로 표현이 가능하다. 그렇다면, 식 (15.203)은 함수 $R_\ell(J_z)$ 및 모드 주파수 Ω 에 대한 적분방정식을 준다. 식 (15.203)의 적분방정식은 *Sacherer의 적분방정식* (*Sacherer's integral equation*)으로 알려져 있다.⁹ 식 (15.203)의 우변은 적분 연산자[함수 $R_\ell(J_z)$ 에 작용하는]와 행렬 연산[$R_\ell(J_z)$ 로 주어지는 벡터 성분에 작용하는]을 모두 포함하고 있다.

식 (15.203)을 완전하게 고유값 문제로 만들기 위해, 함수 $R_\ell(J_z)$ 이 어떤 함수 $f_k(J_z)$ 로 전개될 수 있다고 가정하자.

$$R_\ell(J_z) = W(J_z) \sum_{k=0}^{\infty} a_{\ell k} f_k(J_z). \quad (15.206)$$

여기서 함수 $f_k(J_z)$ 직교화 조건에 의해 다음과 같이 정의되었다.

$$\int_0^\infty W(J_z) f_k(J_z) f_{k'}(J_z) dJ_z = \delta_{kk'}. \quad (15.207)$$

우리는 식 (15.206)을 이용하여 식 (15.203)의 $R_\ell(J_z)$ [그리고 $R'_\ell(J'_z)$]을 치환한다. 이후, 양변에 $f_{k'}(J_z)$ 를 곱하여 J_z 에 대해 적분한다. 직교화 조건 (15.207)을 적용하고 나면 (그리고, k 를 k' 으로, k' 를 k 로 각각 새롭게 첨자를 할당하면), 우리는 다음을 얻는다.

$$\frac{\Omega}{\bar{\omega}_z} a_{\ell k} = \sum_{\ell'=-\infty}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} M_{\ell k \ell' k'} a_{\ell' k'}. \quad (15.208)$$

여기서, $M_{\ell k \ell' k'}$ 는 상호작용 행렬(*interaction matrix*)이고, 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} M_{\ell k \ell' k'} &= \ell \delta_{\ell\ell'} \delta_{kk'} \\ &+ \int_0^\infty dJ_z \int_0^\infty dJ'_z G_{\ell\ell'}(J_z, J'_z) W(J_z) f_k(J_z) W(J'_z) f_{k'}(J'_z). \end{aligned} \quad (15.209)$$

식 (15.208)이 나타내는 것은 섭동의 주파수 Ω 가 4차원 행렬의 고유값으로부터 얻어질 수 있다는 것이다. 특정한 고유값(즉, 주파수)에 해당되는 고유 벡터는 그 주파수로 진동하는 섭동의 형태를 주게

⁸ 즉, 공통적으로 $\partial \Psi_0 / \partial J_z < 0$ 이다.

⁹ F. J. Sacherer, Methods for computing bunched-beam instabilities, Tech. Rep. CERN/SI-BR/72-5 (1972).

된다. 식 (15.208)은 4차원 행렬 형태로 표현되어 있기때문에, 우리는 이 고유값 문제를 직접 풀기는 불가능하다. 하지만, 15 장 4.4 절에서 볼 수 있듯이, 첨자를 적절히 새롭게 할당함으로써, 고유값 문제의 행렬을 2차원으로 간략화시킬 수 있다. 하지만, 먼저 $\ell = \ell'$ 이 아니면 $M_{\ell k \ell' k'}$ 는 0인 경우 (또는 0에 가까운 경우), 고유값 문제는 상대적으로 쉽게 풀 수 있음에 주목하자. 이러한 경우는 방위각 방향 모드(ℓ 로 색인되는)들 끼리 서로 독립적인 상황에 해당이 된다. 우리는 이러한 경우를 15 장 4.3 절에서 먼저 논의한다. 이후 15 장 4.4 절에서는 좀 더 일반적인 경우, 즉 모드들 사이에 어떤 결합이 있는 경우를 다루기로 한다.

4.3 이산 모드: Robinson 불안정성

Sacherer의 적분방정식은 번치 안 입자들의 빔진행 방향 위상공간 분포 섭동의 주파수 및 위상공간 상의 구조를 제공한다. 특정한 섭동에 대한 주파수의 허수부는 우리에게 섭동이 감쇠될지 증폭될지를 알려준다. Sacherer 적분방정식의 일반해를 구하는 것은 어렵지만, 우리는 가속기에서 실제로 중요한 특정한 경우들을 고려하기로 한다.

첫번째로 상호작용 행렬 $M_{\ell k \ell' k'}$ 의 0이 아닌 성분은 $\ell' = \ell$ 에서만 생긴다고 가정하자. 이 경우, 식 (15.208)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\Omega}{\bar{\omega}_z} a_{\ell k} = \sum_{k'=0}^{\infty} M_{\ell k \ell' k'} a_{\ell k'}. \quad (15.210)$$

윗 식은 다시 행렬 형태로 쓸 수 있다.

$$\frac{\Omega}{\bar{\omega}_z} \mathbf{a}^{(\ell)} = M^{(\ell)} \mathbf{a}^{(\ell)}. \quad (15.211)$$

여기서, $M^{(\ell)}$ 은 $M_{\ell k \ell' k'}$ 을 원소로 하는 행렬이고, $\mathbf{a}^{(\ell)}$ 은 $a_{\ell k}$ 을 원소로 가지는 벡터이다. 서로 다른 ℓ 값을 가지는 모드들은 서로 독립적이라 가정한다. 이러한 가정은 문제를 많이 단순화시키지만, 우리가 관심있는 모든 경우를 포함하지는 못하게 된다. 그럼에도 불구하고, 이 경우에 대하여 모드 주파수들과 그 구조를 고찰해 나가기로 하자.

먼저, 식 (15.209)와 (15.205)로 부터, 행렬 $M^{(\ell)}$ 은 다음과 같은 원소를 가짐에 주목하자.

$$M_{kk'}^{(\ell)} = \ell \delta_{kk'} + i \frac{q^2 N_b c^2 \omega_0^2 \eta_p \ell}{2\pi E_0 \bar{\omega}_z^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_{\parallel}(\Omega_p)}{\Omega_p} g_{\ell k}(\Omega_p) g_{\ell k'}(\Omega_p). \quad (15.212)$$

여기서,

$$g_{\ell k}(\Omega_p) = \int_0^{\infty} W(J_z) J_{\ell} \left(\frac{\Omega_p \hat{z}}{c} \right) f_k(J_z) dJ_z. \quad (15.213)$$

모드 주파수 Ω 의 계산은 다음과 같은 과정으로 진행된다. 주어진 섭동 이전의 분포 Ψ_0 에 대해, 식 (15.204)로부터 가중 함수 $W(J_z)$ 가 계산된다. 이후 함수 $f_k(J_z)$ 가 식 (15.207)에서 결정되고, 함수 $g_{\ell k}(\Omega_p)$ 은 식 (15.213)으로부터 얻어진다. 그리고 나서, 주어진 임피던스와 모드 번호 ℓ 에 대해, 행렬 $M^{(\ell)}$ 이 식 (15.212)로부터 계산된다. 행렬 $M^{(\ell)}$ 의 고유값은 $\Omega/\bar{\omega}_z$ 와 같다. 주어진 모드 번호 ℓ 에 대해,

서로 다른 고유값에 해당하는 다수의 서로 다른 주파수 Ω 가 존재한다. 각각의 주파수는 섭동의 J_z 에 대한 서로 다른 의존성, 즉 서로 다른 $R_\ell(J_z)$ 에 연관이 되어 있다. 식 (15.206)으로부터, 우리는 서로 다른 (즉, 빔진행 방향 위상공간에서 서로 다른 반경 방향 모드에 해당하는) $R_\ell(J_z)$ 가 행렬 $M^{(\ell)}$ 의 고유값으로부터 결정됨을 볼 수 있다. 주어진 어떠한 ℓ 에 대해서도, $M^{(\ell)}$ 은 무한히 많은 수의 행렬 요소를 가진다. 어떤 특정한 모드의 주파수를 계산하기 위해서는, 따라서, 행렬의 일부를 생략하여 줄여야 한다. 이렇게 절단된 행렬의 고유값은 원래 전체 행렬 $M^{(\ell)}$ 에 대해 계산된 고유값과 정확히 같지는 않을 것이다. 하지만, 절단된 행렬에 충분히 많은 요소가 포함되어 있다면, 절단된 행렬의 고유값은 최소한 몇몇 모드들에 대해서는 주파수에 대한 합리적인 근사를 줄 것이다.

모드 주파수에 대한 식을 풀지 않더라도, 단순히 식 (15.212)의 형태만으로도 어떤 경우에 대해서는 빔의 안정성에 대해 몇가지 기술이 가능하다. 예를 들어, 만약 임피던스가 순허수라면, $M^{(\ell)}$ 은 실수의 대칭 행렬이 된다. 이 경우, 고유값은 실수이고, 빔불안정성은 발생하지 않는다. 이러한 사실은 3 절에서 얻은 결과와 유사하다. 즉, 우리는 순허수의 임피던스를 가질 때 (Vlasov 방정식에 기초한 관성운동 빔에 대한 해석을 따라), 빔은 임피던스의 부호에 의존해서 항상 안정된다고 결론을 내린 바가 있다. 지금의 경우는 조금 다른데, 순허수의 임피던스를 가질 때, 빔은 임피던스의 부호에 상관없이 항상 안정하다. 이러한 불일치는 지금의 해석에서 우리는 서로 다른 모드 번호 ℓ 사이의 결합을 무시하고 있다는 것에서 기인한다. 이러한 이슈는 15 장 4.4 절에서 바로 잡게 될 것이다.

식 (15.212)으로부터 또 하나 볼 수 있는 것은 임피던스가 어떤 특정 주파수에서 매우 급격한 피크를 가지면, 짧은 번치에 대해 빔불안정성이 발생할 가능성이 매우 높다는 것이다. 예를 들면, 매우 높은 품질인자를 가지는 공동공진기의 경우이다. 이러한 성질은 다음과 같이 보여질 수 있다. 짧은 번치라는 조건은 다음과 같이 명시적으로 표현할 수 있다.

$$\frac{\omega_{\max}\sigma_z}{c} \ll 1. \quad (15.214)$$

여기서, 임피던스는 주파수 $\omega_{\max}$ 까지 값을 가지고, σ_z 는 번치 길이이다. 이 조건이 만족하는 경우 우리는 식 (15.213)의 베셀 함수를 함수인자에 대한 가장 낮은 차수로 전개할 수 있다.

$$J_\ell\left(\frac{\Omega_p \hat{z}}{c}\right) \approx \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{\Omega_p \hat{z}}{c}\right)^\ell. \quad (15.215)$$

이제, $g_{\ell k}(\Omega_p)g_{\ell k'}(\Omega_p)$ 항은 Ω_p 에 대한 우함수가 된다. 광대역 임피던스에 대해서는, 식 (15.212)에 있는 p 에 대한 합은 적분으로 대체될 수 있다. 이 경우, 식 (14.188)으로부터 $M^{(\ell)}$ 은 실수의 대칭 행렬이 된다. 따라서, $M^{(\ell)}$ 의 고유값들은 반드시 실수이어야 한다. 즉, 모드 주파수 Ω 는 0의 허수부를 가지고, 따라서 빔은 반드시 안정하다. 빔불안정성은 임피던스가 매우 급격한 피크를 가질 때 (이 절의 나머지 부분에서 다룰 예정), 또는 긴 번치의 경우, 또는 서로 다른 모드 ℓ 사이에 커플링(이 부분은 15.4.4 절에서 논의)이 발생하는 경우에만 발생할 수 있다.

Water-bag 분포

서로 다른 모드의 주파수를 찾기 위해 지금까지 우리가 기술한 절차의 예시로서, 저장링 안에서 빔이 ‘물주머니(water-bag)’ 분포를 빔진행 방향 위상공간에 대해 가지는 특별히 경우를 고려하자. 그리고, 저장링의 임피던스는 매우 급격한 피크를 가지는 (즉, 품질인자가 높은) 공진기처럼 기술된다고 생각한다. 여기서, water-bag 분포는 어떤 작용값 J_{z0} 까지는 균일하고, 작용값이 J_{z0} 보다 크면 0이 되는 분포이다.

$$\Psi_0(J_z) = \begin{cases} qN_b/2\pi J_{z0} & \text{if } J_z \leq J_{z0}, \\ 0 & \text{if } J_z > J_{z0}. \end{cases} \quad (15.216)$$

여기서 분포함수는 아래와 같이 정규화 되어있다.

$$\int_0^{2\pi} d\phi_z \int_0^\infty dJ_z \Psi_0(J_z) = qN_b. \quad (15.217)$$

저장링에서의 임피던스로 인해 분포함수는 번치 전하에 의존하게 될 것이다. 식 (15.216)의 분포함수는 포텐셜 우물 왜곡 효과를 포함하고 있다. 분포함수를 J_z 에 대해 미분을 취하면, 디랙 델타 함수가 된다.

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial J_z} = -\frac{qN_b}{2\pi J_{z0}} \delta_D(J_z - J_{z0}). \quad (15.218)$$

따라서, 식 (15.204)를 이용하면, 이경우 가중함수는 다음과 같다.

$$W(J_z) = \frac{\delta_D(J_z - J_{z0})}{2\pi\beta_z J_{z0}}. \quad (15.219)$$

가중함수가 델타 함수이기 때문에, 식 (15.206)의 형태로 표현할 수 있는 유일한 섭동은, 빔진행 방향 위상공간에서 분포함수의 경계 근처에서의 섭동뿐이다. 따라서, 방위각 방향으로의 임의의 갯수의 모드를 가질 수 있지만, 반경 방향으로는 단 하나의 모드를 가진다.¹⁰ 결과적으로, 정규직교 함수 $f_k(J_z)$ 의 집합은 아래와 같은 단 하나의 원소만을 갖는다.

$$f_0(J_z) = \sqrt{2\pi\beta_z J_{z0}}. \quad (15.220)$$

위 식은 식 (15.207)을 사용하여 얻어졌다. 따라서, 식 (15.213)을 통해

$$g_{\ell 0}(\Omega_p) = \int_0^\infty \frac{\delta_D(J_z - J_{z0})}{\sqrt{2\pi\beta_z J_{z0}}} J_\ell \left(\frac{\Omega_p \hat{z}}{c} \right) dJ_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_z J_{z0}}} J_\ell \left(\frac{\Omega_p \hat{z}_0}{c} \right). \quad (15.221)$$

여기서,

$$\hat{z}_0 = \sqrt{2\beta_z J_{z0}}. \quad (15.222)$$

¹⁰주: 잘 이해가 안가는데, 델타 함수때문에, $J_z = J_{z0}$ 값만 사용이 되기 때문에, J_z 에 대한 함수형태는 무의미하다는 것으로 일단 이해.

만약, 임피던스에 대한 지배적인 기여가 저장링의 RF 공동공진기로부터 온다면, 식 (15.212)의 급수합에 대한 가장 주된 기여는 주파수 Ω_p 가 다음과 같을 때이다.

$$\Omega_p \approx \pm h\omega_0. \quad (15.223)$$

여기서, h 는 저장링의 조화수이고, ω_0 는 회전 주파수이다. RF의 파장은 번치 길이에 비해 커야하므로,

$$\frac{\Omega_p \hat{z}_0}{c} \approx \frac{h\omega_0 \hat{z}_0}{c} \ll 1. \quad (15.224)$$

따라서, 우리는 식 (15.221)의 베셀 함수를 $\hat{z}_0$ 에 대한 1차항까지 전개하여 다음을 얻는다.

$$g_{\ell 0}(\Omega_p) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_z J_{z0}}} \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{\Omega_p \hat{z}_0}{c} \right)^\ell. \quad (15.225)$$

이제, 식 (15.212)로부터,

$$M_{00}^{(\ell)} = 1 + i \frac{q^2 N_b \omega_0^2 \eta_p}{8\pi^2 \ell! (\ell-1)! E_0 \bar{\omega}_z^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Omega_p Z_{||}(\Omega_p) \left(\frac{\Omega_p^2 \beta_z J_{z0}}{2c^2} \right)^{\ell-1}. \quad (15.226)$$

특별히 $\ell = 1$ 인 경우는 이극 진동 모드에 해당된다. 만약, 번치내부의 전하 분포가 이극 모드 섭동을 가지면, 빔진행 방향으로의 위상공간 분포 자체는 타원 형태를 유지하지만, 그 중심이 원점에 위치하지는 못하게 된다. 좌표 공간에서는, 전체 번치가 저장링 주위를 돌면서 기준 입자에 대해 앞서거나 뒤서거나 하며 진동하는 것처럼 보일 것이다. 동시에 이에 해당하는 에너지의 진동도 있게되는데, z 방향으로의 진동과 90° 도 위상차이를 가지게 된다. 식 (15.226)에 $\ell = 1$ 을 대입하면,

$$M_{00}^{(1)} = 1 + i \frac{q^2 N_b \omega_0^2 \eta_p}{8\pi^2 E_0 \bar{\omega}_z^2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Omega_p Z_{||}(\Omega_p), \quad (15.227)$$

을 얻고, 여기서

$$\Omega_p = \Omega + p\omega_0 \approx p\omega_0. \quad (15.228)$$

Ω_p 에 대한 근사는 임피던스의 공진주파수가 이극 섭동의 진동주파수보다 클 때 유효하다. 우리는 이극 섭동의 진동주파수가 싱크로트론 주파수에 가까울 것으로 예상하며, 실제로 싱크로트론 주파수는 RF 공동공진기의 공명주파수에 비해 작다. 최종적으로 식 (15.211)을 사용하면, 우리는 이극 모드 섭동의 주파수를 다음과 같이 얻는다.

$$\Omega \approx \bar{\omega}_z + i \frac{q^2 N_b \omega_0^2 \eta_p}{8\pi^2 E_0 \bar{\omega}_z} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Omega_p Z_{||}(\Omega_p). \quad (15.229)$$

이 모드 진폭의 지수함수적 증가율은 허수부로 주어지기 때문에,

$$\frac{1}{\tau} \approx \frac{q^2 N_b \omega_0^2 \eta_p}{8\pi^2 E_0 \bar{\omega}_z} \operatorname{Re} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \Omega_p Z_{||}(\Omega_p). \quad (15.230)$$

식 (15.173)으로부터, 만약 섭동 주파수의 허수부가 양수라면 이 모드는 증폭이 되고, 만약 허수부가 음수라면 이 모드는 감쇠됨을 알 수 있다.

이극 모드 주파수의 표현식 (15.229)은 식 (15.40)의 빔진행 방향 결합-변치 모드 주파수의 표현식과 비교해 봐야 한다. 후자의 경우, 단일 저장링에서 단 하나의 변치만을 고려한다면, $n_b = 1$ 이고, 유일하게 발진 가능한 진동모드는 이극 모드이다. 우리는 변치를 하나의 거시 입자로 취급하여 기술하고 있기 때문에, 전하분포는 빔진행 방향 위상공간에서 강체 진동을 해야만 한다. 즉, 이 경우의 운동은 water-bag 모델에서의 운동과 정확히 같다. 만약, 식 (15.40)에 있는 W_s^2 항이 싱크로트론 주파수 ω_z 를 $\bar{\omega}_z$ 로 바꾼다고 가정하면 (우리는 그 때 이 항이 빔진행 방향 집속 포텐셜의 변화, 즉, 포텐셜 우물의 왜곡을 나타낸다고 논의했었다.), 식 (15.40)과 (15.229)은 이극 모드 주파수에 대해 같은 결과를 준다. 이것은 우리가 이미 예상한 바이다. 비록 해석에 쓰인 접근방법은 두 경우 매우 다르다고 하더라도, 바탕에 깔린 물리는 기본적으로 같다.

식 (15.40)과 (15.229)은 모두 1.2 절에서 다룬 로빈슨 불안정성(Robinson instability)을 기술한다. 하지만, 1.2 절에서는 이극 불안정성만을 고려를 했고, 여기서는 저장링 안의 각각의 변치는 하나의 강체처럼 거동을 한다고 가정한다. 우리의 해석은 각각의 변치를 하나의 거시 입자로 나타내는 모델에 기초를 한 것이다. 식 (15.227)로부터 사실은 (각각의 변치들에 대해) 많은 빔진행 방향 모드가 임피던스의 특성에 따라 불안정해 질 수 있음을 볼 수 있다. 하지만, 고차 모드들은 낮은 증가율을 가질 것으로 예상이 된다. 그리고, 다행히도, 임피던스가 RF 공진기에 의해 지배된다면, 공진기를 $\omega_r = h\omega_0 + \Delta\omega$ 로 살짝 디튠함으로써 모든 모드들을 억제할 수 있다. 여기서, $\Delta\omega$ 는 below transition 에서는 양수이고, above transition 에서는 음수이다. 그리고 실제 RF 작동 주파수는 $h\omega_0$ 이다.

Gaussian 분포

빔진행 방향 위상공간에서의 전하 분포의 형태가 로빈슨 불안정성에 어떤 효과를 미치는지를 고려해 보는 것은 흥미로운 일이다. 지금까지 우리는 water-bag 분포만을 고려해 왔다. 하지만, 우리는 같은 기법을 (원칙적으로) 어떠한 분포에도 적용할 수 있다. 좀 더 실제적인 분포는 가우시안이고, 빔진행 방향 작용을 사용하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Psi_0(J_z) = \frac{qN_b}{2\pi\epsilon_z} e^{-J_z/\epsilon_z}. \quad (15.231)$$

여기서, $\epsilon_z = \langle J_z \rangle$ 은 빔진행 방향 이미턴스이다. 역시, 분포는 식 (15.216)가 만족하도록 정규화되어 있다. 분포는 변치 전하에 의존성이 있는데, 이것은 임피던스에 의한 효과때문이다. 우리는 식 (15.231)의 분포가 포텐셜 우물 왜곡을 포함한다고 가정한다. 이 경우 가중함수는 다음과 같다.

$$W(J_z) = -\frac{1}{qN_b\beta_z} \frac{\partial \Psi_0}{\partial J_z} = \frac{e^{-J_z/\epsilon_z}}{2\pi\beta_z\epsilon_z^2}. \quad (15.232)$$

식 (15.207)에서 정의된 정규직교함수 $f_k(J_z)$ 는 라게르 다항식으로 표현이 된다.

$$f_k(J_z) = \sqrt{2\pi\beta_z\epsilon_z} L_k(J_z/\epsilon_z). \quad (15.233)$$

그러면, 식 (15.213)으로부터 함수 $g_{\ell k}(\Omega_p)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$g_{\ell k}(\Omega_p) = \int_0^\infty \frac{e^{-J_z/\epsilon_z}}{\sqrt{2\pi\beta_z\epsilon_z}} J_\ell \left(\zeta \sqrt{\frac{J_z}{\epsilon_z}} \right) L_k \left(\frac{J_z}{\epsilon_z} \right) \frac{dJ_z}{\epsilon_z}. \quad (15.234)$$

여기서,

$$\zeta = \frac{\Omega_p}{c} \sqrt{2\beta_z\epsilon_z}. \quad (15.235)$$

만약, 임피던스가 RF 공진기에 의해 지배되고, 공진주파수 $\omega_r \approx h\omega_0$ 에서 급격하게 피크를 가진다면, 식 (15.212)의 $M_{kk'}^{(\ell)}$ 에 대한 유일한 기여는 주파수가 $\Omega_p \approx \omega_r$ 일 때로부터 온다. 짧은 변치에 대해서는, $\zeta \ll 1$, 식 (15.234)의 베셀 함수를 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$J_\ell \left(\zeta \sqrt{\frac{J_z}{\epsilon_z}} \right) \approx \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\zeta \sqrt{\frac{J_z}{\epsilon_z}} \right)^\ell. \quad (15.236)$$

이제 다음의 결과를 이용하면,

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\nu L_k(x) dx = \frac{\Gamma(1+\nu) \Gamma(k-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \frac{1}{k!}, \quad (15.237)$$

식 (15.234)은 다음과 같이 된다.

$$g_{\ell k}(\Omega_p) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \left(\frac{\Omega_p}{c\sqrt{\pi}} \right)^\ell (2\pi\beta_z\epsilon_z)^{(\ell-1)/2} \frac{\Gamma(1+\frac{\ell}{2}) \Gamma(k-\frac{\ell}{2})}{\Gamma(-\frac{\ell}{2})} \frac{1}{k!}. \quad (15.238)$$

이극 모드 $\ell = 1$ 에 대해, 식 (15.238)을 식 (15.212)에 대입하면,

$$M_{kk'}^{(1)} = \delta_{kk'} + i \frac{q^2 N_b \omega_0^2 \eta_p}{8\pi^2 E_0 \bar{\omega}_z^2} \sum_{p=-\infty}^\infty \Omega_p Z_{||}(\Omega_p) \frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})}{4k!} \frac{\Gamma(k'-\frac{1}{2})}{4k'!}. \quad (15.239)$$

여기서, Ω_p 는 식 (15.228)로 주어진다. 행렬 $M^{(1)}$ 은, $k_{\max}$ 에서 절단을 하면, 1이 아닌 하나의 고유값을 가지는데, $k_{\max}$ 가 매우 큰 극한에서 다음과 같다.¹¹

$$\frac{\Omega}{\bar{\omega}_z} = 1 + i \frac{q^2 N_b \omega_0^2 \eta_p}{8\pi^2 E_0 \bar{\omega}_z^2} \sum_{p=-\infty}^\infty \Omega_p Z_{||}(\Omega_p). \quad (15.240)$$

식 (15.227)과 비교를 하면, 가우시안 분포에 대한 이극 모드 주파수가 water-bag 분포에 대한 이극 모드 주파수가 같음을 볼 수 있다. 따라서, 로빈슨 불안정성의 지배적인 (이극) 모드에 대한 증가율은 점 전하, water-bag 분포, 그리고 가우시안 분포에 대해 모두 같게 된다.

¹¹이 부분은 명확히 이해가 안됨.

4.4 모드 결합

4.3절에서 우리는, 주파수 Ω 를 가지는 빔진행 방향 모드들을 전부다 독립적으로 취급할 수 있다면, 짧은 번치에 대한 빔불안정성은 급격하게 피크를 이루는 임피던스의 경우에만 발생할 수 있음을 보았다. 이 경우, 모드의 진폭은 많은 턴에 걸쳐서 지속되는 웨이크 필드와의 상호작용의 결과로 증가할 수 있게 된다. 이런 결과로 생긴 불안정성이 로빈스 빔불안정성으로 알려져있다. 만약 우리가 서로 다른 모드사이의 커플링을 허용하게 되면, 즉, 우리가 식 (15.208)의 ℓ' 에 대한 급수합에서 $\ell' = \ell$ 항뿐만 아니라 다른 모든 항들을 포함한다면, 상황은 바뀌어 진다. 이 경우에 발생하는 불안정성은 모드-결합 빔불안정성(mode-coupling instability)으로 알려져 있고, 이번 절에서 다루게 된다.

고유값 문제를 풀기위해서는, 식 (15.208)을 표준적인 고유값 방정식의 형태, 즉, 4차원 행렬이 아니라, 2차원 행렬로 표현해야 한다. 첫 단계로 ℓ' 및 k' 에 대한 합을 각각 $\pm\bar{N}$ 및 $2\bar{N}$ 에서 절단한다. 그러고 나면, 식 (15.208)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\Omega}{\bar{\omega}_z} a_{\ell k} \approx \sum_{\ell'=-\bar{N}}^{\bar{N}} \sum_{k'=0}^{2\bar{N}} M_{\ell k \ell' k'} a_{\ell' k'}. \quad (15.241)$$

이제, 우리는 새로운 변수 j 및 j' 을 정의한다.

$$j = (2\bar{N} + 1)(\ell + \bar{N}) + k \quad (15.242)$$

$$j' = (2\bar{N} + 1)(\ell' + \bar{N}) + k'. \quad (15.243)$$

새로운 인덱스 j 및 j' 를 사용하여, 식 (15.241)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\Omega}{\bar{\omega}_z} a_j \approx \sum_{j'=0}^{4\bar{N}(\bar{N}+1)} M_{jj'} a_{j'}. \quad (15.244)$$

여기서,

$$M_{jj'} = M_{\ell k \ell' k'}, \quad (15.245)$$

그리고

$$a_j = a_{\ell k}, \quad a_{j'} = a_{\ell' k'}. \quad (15.246)$$

j' 의 첫째 항은 $\ell' = -\bar{N}$ 및 $k' = 0$ 일때 $j' = 0$ 이고, 마지막 항은 $\ell' = \bar{N}$ 및 $k' = 2\bar{N}$ 일때 $j' = (2\bar{N} + 1)2\bar{N} + 2\bar{N} = 4\bar{N}(\bar{N} + 1)$ 이다. 어떠한 주어진 모드 인덱스 ℓ 에 대해, $2\bar{N} + 1$ 개의 모드 주파수 Ω 가 존재하며, 이 주파수는 $M_{jj'}$ 의 고유값과 연관이 되어 있다. 각각의 주파수는 빔진행 방향 위상공간에서 전하 밀도의 특정한 섭동에 해당된다.

모드들의 거동과 불안정성의 발현을 예시하기 위해, 식 (15.216)처럼 위상공간에서 water-bag 분포를 가지는 특별한 경우를 가정하자.

$$\Psi_0(J_z) = \begin{cases} qN_b/2\pi J_{z0} & \text{if } J_z \leq J_{z0}, \\ 0 & \text{if } J_z > J_{z0}. \end{cases} \quad (15.247)$$

이러한 분포는 이미 4.3 절에서 논의된 바가 있는데, 거기서 우리는 가중함수가 디락 델타함수로 주어짐을 알 수 있었고,

$$W(J_z) = \frac{\delta_D(J_z - J_{z0})}{2\pi\beta_z J_{z0}}, \quad (15.248)$$

함수의 집합 $f_k(J_z)$ 는 아래와 같은 하나의 원소만 가짐을 보았다.

$$f_0(J_z) = \sqrt{2\pi\beta_z J_{z0}}. \quad (15.249)$$

지금의 경우에서는 서로 다른 모드들 사이의 커플링 효과를 포함하려고 하는데, 함수의 집합 $f_k(J_z)$ 가 하나의 원소를 가진다는 것이 문제를 상당히 단순화시켜준다. 즉, 식 (15.241)을 아래와 같이 쓸 수 있게 되는데,

$$\frac{\Omega}{\bar{\omega}_z} a_\ell \approx \sum_{\ell'=0}^{2\bar{N}+1} M_{\ell\ell'} a_{\ell'}, \quad (15.250)$$

따라서, 4차원 행렬을 ‘flatten’(행렬을 1차원 배열로 전환하기)하는 과정이 불필요하다.

식 (15.209), (15.248), (15.249)를 이용하면, 상호작용 행렬(interaction matrix)은 다음과 같이 된다.

$$M_{\ell\ell'} = \ell\delta_{\ell\ell'} + i^{1+\ell-\ell'} \frac{q^2 N_b c^2 \omega_0^2 \eta_p \ell}{4\pi^2 E_0 \bar{\omega}_z^2 \beta_z J_{z0}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{Z_{\parallel}(\Omega_p)}{\Omega_p} J_\ell \left(\frac{\Omega_p \hat{z}_0}{c} \right) J_{\ell'} \left(\frac{\Omega_p \hat{z}_0}{c} \right). \quad (15.251)$$

여기서, $\hat{z}_0 = \sqrt{2\beta_z J_{z0}}$ 이다. 이제 임피던스가 급격하게 피크를 이루기 보다는, 광대역의 주파수에 걸쳐있다고 가정하자. 그렇다면, 우리는 식 (15.251)의 급수를 적분으로 치환할 수 있다.

$$M_{\ell\ell'} = \ell\delta_{\ell\ell'} + i^{1+\ell-\ell'} \frac{q^2 N_b c^2 \omega_0^2 \eta_p \ell}{4\pi^2 E_0 \bar{\omega}_z^2 \beta_z J_{z0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega_0} \frac{Z_{\parallel}(\omega)}{\omega} J_\ell \left(\frac{\omega \hat{z}_0}{c} \right) J_{\ell'} \left(\frac{\omega \hat{z}_0}{c} \right). \quad (15.252)$$

좀 더 식을 전개하기 위해, 우리는 임피던스의 명시적인 함수꼴이 필요하다. 다음과 같은 형태의 임피던스를 가정하자.

$$Z_{\parallel}(\omega) = R_s (1 + i \operatorname{sgn}(\omega)) \sqrt{\frac{\omega_0}{|\omega|}}. \quad (15.253)$$

여기서, R_s 는 상수이다. 식 (15.253)의 임피던스는 회절 모델이라고 알려져 있는데, $\omega > \omega_r$ 인 영역에서는 대략적으로 품질인자가 $Q_s \approx 1$ 이고 공명주파수가 ω_r 인 광대역 공진기처럼 거동을 한다. 식 (15.253)의 적분변수를 ω 에서 $u = \omega \hat{z}_0 / c$ 로 변환하면, 상호작용 행렬은 다음과 같이 된다.

$$M_{\ell\ell'} = \ell\delta_{\ell\ell'} + i^{1+\ell-\ell'} \ell \Upsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{u} (1 + i \operatorname{sgn}(u)) \frac{J_\ell(u) J_{\ell'}(u)}{\sqrt{|n|}}. \quad (15.254)$$

여기서, 무차원 파라미터 Υ 은 장치 및 빔 파라미터에 의해 결정된다.

$$\Upsilon = \frac{R_s q^2 N_b \omega_0 \eta_p}{2\pi^2 E_0 \bar{\nu}_z^2} \left(\frac{c}{\omega_0 \hat{z}_0} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (15.255)$$

우리는 식 (15.222)을 사용하여, $\beta_z J_{z0} = \hat{z}_0^2 / 2$ 로 썼다. 그리고, 싱크로트론 튜 $\bar{\nu}_z$ 는 싱크로트론 주파수를 회전주파수로 나눈 값으로 정의되었다.

$$\bar{\nu}_z = \frac{\bar{\omega}_z}{\omega_0} \quad (15.256)$$

식 (15.254)의 적분은 수치적으로 계산되거나, 또는 다음의 공식을 이용하여 해석적으로 계산할 수 있다.

$$\int_0^\infty J_\ell(u) J_{\ell'}(u) u^{-\lambda} du = \frac{\Gamma(\lambda) \Gamma(\frac{\ell+\ell'-\lambda+1}{2})}{2\lambda \Gamma(\frac{-\ell+\ell'+\lambda+1}{2}) \Gamma(\frac{\ell+\ell'+\lambda+1}{2}) \Gamma(\frac{\ell-\ell'+\lambda+1}{2})}. \quad (15.257)$$

여기서, $\text{Re}(\ell + \ell' + 1) > \text{Re}(\lambda) > 0$ 이다. 상호작용 행렬 $M_{\ell\ell'}$ 은 이제, 행렬의 어떠한 절단 차수에 대해서도 계산되어질 수 있게 된다. 이 해석에서 포텐셜-우물의 왜곡은 무시되었음에 주목해야 한다. 포텐셜-우물의 왜곡은 빔진행 방향 위상공간의 분포를 (그리고 싱크로트론 튜를) 번치 전하의 함수에 따라 변화시킨다. 또한, 절단 과정이 반드시 수렴된다는 보장도 없다. 즉, 상호작용 행렬에 고차 모드를 포함시킴으로 말미암아 저차 모드들에 상당한 거동의 변화가 관찰될 수도 있다. 특별히, 수렴이 잘 되려면 고주파로 갈수록 임피던스가 빨리 감소해야 한다. 따라서, 예를 들면, 공간 전하 또는 저항성-벽면 임피던스의 경우가 지금과 같은 절차로는 다루기가 쉽지 않다.

그림 15.7은 고유값을 Υ 에 대한 함수로 나타내는데, 상호작용 행렬을 $-5 < \ell < 5$ 가 되도록 (ℓ' 에 대해서도 마찬가지로) 절단하였다. 비록 이 결과는 저장링에서 낮은 품질인자의 공진기 임피던스를 가지는 water-bag 분포에 대한 특수한 경우이지만, 그림에서 보여지는 고유값의 거동은 이러한 형태의 시스템에 대해 특징적인 경향이다. 작은 Υ 값에 대해서는 (예를 들어, 적은 번치 내 입자 개수 N_b 또는 낮은 선트 임피던스 R_s 의 경우), 고유값 $\Omega/\bar{\omega}_z$ 들은 실수부만 있고, 근사적으로 정수값을 가진다. 이 영역에서, 정규 모드 섭동의 주파수는 근사적으로 $\ell\bar{\omega}_z$ 이고, 여기서, ℓ 은 정수인 모드 번호이다. 해당 고유값들을 잘 살펴보고 식 (15.193)을 이용하면, 모드 번호 ℓ 인 섭동은 $\sim e^{i\ell\phi_z}$ 의 의존성을 방위각 변수에 대해 가짐을 확인할 수 있다. 따라서, 식 (15.173)으로부터, 위상공간 분포는 다음과 같다.

$$\Psi \approx \Psi_0 + \Psi_1 \delta_D(J_z - J_{z0}) e^{i\ell(\phi_z - \bar{\omega}_z t)}, \quad (15.258)$$

여기서, Ψ_0 는 식 (15.247)으로 주어지고, Ψ_1 은 상수인 진폭이다. 각각의 모드는 빔진행 방향 위상공간 분포의 경계 주변에서 파동의 형태를 가지는데, 이 파동의 위상속도는 싱크로트론 주파수와 같다.

번치 전하(또는 임피던스)가 증가함에 따라, 섭동의 주파수가 변화하기 시작한다. $\Upsilon = \Upsilon_{\text{threshold}} \approx 1.3$ 인 값에서 모드 $\ell = 1$ 및 $\ell = 2$ 의 주파수가 서로 같아진다. 만약, Υ 이 더 증가하면, 이 모드들의 주파수의 실수부는 계속해서 같되, 주파수는 허수부를 가지게 된다. 이것이 말하는 것은 이러한 모드에 해당하는 섭동의 진폭이 지수함수적으로 증폭되거나 또는 감쇠된다는 것이다. 일반적으로 하나의 모드는 양수의 허수부를 가지는 주파수를 가지는데, 이 경우에는 빔분포가 불안정해 진다. 우리의 해석은 섭동이론(즉, 극소로 작은 섭동을 가정함)에 기초를 하고 있기 때문에, 우리는 밀도 섭동의 진폭이 어느 정도로 성장할지를 정확히 이야기하지는 못한다. 예를 들어, 빔이 빨리 새로운 평형상태에 도달하여 다른 분포를 가지게 될 지도 모른다. 하지만, 주파수의 허수부는, Υ 의 함수로서, 빠르게 싱크로트론 주파수에 대등한 값에 도달하게 된다. 그리고 지수함수적 증가율은 따라서 상당히 커지게 된다. 전자 저장링에서는, 예를 들면, 증가율이 쉽게 싱크로트론 복사에 의한 감쇠율보다 커지게 된다. 이런 형태의 불안정성은, 위상공간에서 밀도 섭동의 두 모드가 서로 합쳐지는 것으로 특징지어지기 때문에,

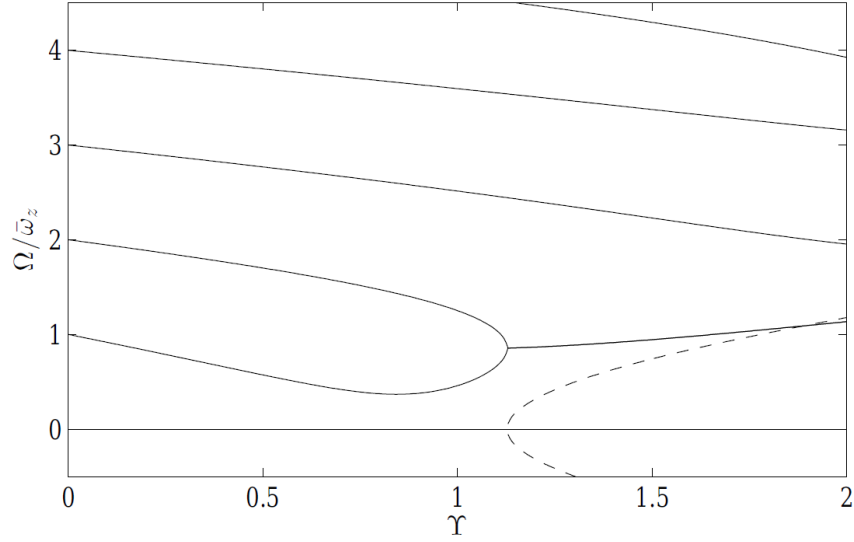


그림 15.7: Water-bag 빔에 대한, 빔진행 방향 위상공간에서 섭동들의 모두 주파수. 주파수들은 상호작용 행렬의 고유값들로 부터 결정이 되며, 이때 식 (15.253)의 회절 임피던스 모델이 사용되었다. 파라미터 Υ 은 식 (15.255)로 정의되었다. 실선은 고유값의 실수부를 나타낸다. 파선은 고유값의 허수부를 나타내는데, 이것은 모드 $\ell = 1$ 과 $\ell = 2$ 의 커플링의 결과로 나타난다. 모드 주파수의 양수인 허수부는 섭동 진폭의 증가율을 기술한다. 모드 $0 \leq \ell \leq 5$ 만 그림에 나타나 있고, $\ell < 0$ 인 모드들도 같은 형태를 보인다.

모드-결합 빔불안정성(mode-coupling instability)라고 알려져 있다.

불안정성이 빠른 증가율을 가질 가능성이 있음을 고려하면, 저장링을 불안정성의 임계점 아래의 파라미터로 운전하는 것이 보통 바람직하다. 만약에 높은 번치 전하로 운전을 할 필요가 있다면, 임피던스를 가급적 작게 유지하기 위해, 아주 주의해서 진공 챔버를 설계하고 제작해야 한다. 하지만 이것은 불안정성 문턱 이상에서 운전하는 것이 아주 불가능하다는 것을 이야기하는 것은 아니다. 실제로는 불안정성의 증가율이 매우 크다고 할지라도, 그 실질적인 결과는 상대적으로 무해할 수 있다. 이것은 빔진행 방향 모드-결합 불안정성의 주된 효과가 빔진행 방향 이미턴스를 종종 증가시키고, 따라서 번치의 길이를 증가시키기 때문이다. 우리가 식 (15.255)에서 보는 바와 같이, (번치 전하로 표현된) 임계값은 번치 길이에 의존한다. 따라서, 번치 전하가 특정한 번치 길이에 대해 불안정성의 임계값 이상으로 증가하면, 번치가 임계값 $\Upsilon_{\text{threshold}}$ 에 의해 결정되는 번치 길이를 가지고 새로운 평형상태에 도달하는 것이 가능하다. 식 (15.255)으로부터, 회절 모델 임피던스에 대해 임계값 이상에서 번치 길이는 다음과 변할 거라 예상할 수 있다.

$$\hat{z}_0 = \frac{c}{\omega_0} \left(\frac{R_s q^2 N_b \omega_0 \eta_p}{2\pi^2 E_0 \bar{\nu}_z^2 \Upsilon_{\text{threshold}}} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (15.259)$$

여기서, $\Upsilon_{\text{threshold}} \approx 1.3$. 식 (15.259)는 이론이 맞는지 시험해 볼 수 있는 방법을 제공하는데, 왜냐하면

주어진 저장링에서, 번치 길이는 번치 전하, 위상 미끄럼 인자, 빔 에너지, 그리고 싱크로트론 튜의 함수로 측정을 할 수 있기 때문이다. 정확한 의존성의 형태는 임피던스의 성질에 의존하지만, 어느정도 일반적인 조건에서는 임계값 이상에서의 번치 길이는 다음과 같이 변할 것으로 예상된다.

$$\sigma_z \propto \xi^a, \quad (15.260)$$

여기서, a 는 어떤 상수 파라미터이고, 변수 ξ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\xi = \frac{I_{\text{avg}} \eta_p}{E_0 \nu_z^2}. \quad (15.261)$$

I_{avg} 는 저장링의 평균 전류이다. 식 (15.260)는 스케일링 법칙(*scaling law*)으로 알려져 있다. 이번 절에서 논의된 단순화된 불안정성 모델, 그리고 회절 모델로 주어진 임피던스에 대해서는, 식 (15.259)으로부터 $a = 2/3$ 으로 예상할 수 있다. SPEAR 장치에서 측정된 바에 의하면 $a \approx 0.76$ 에서 스케일링 법칙이 빔의 거동을 잘 기술하였다. 이러한 경우는 *SPEAR scaling*으로 알려져 있다.

한가지 언급할 것은, 우리가 비록 빔진행 방향 위상공간에서의 빔동역학만을 다루었지만, 모드 결합은 횡단면 방향 위상공간에서도 역시 발생할 수 있다. 횡단면 방향 모드-결합 불안정은 우리가 4.1 절에서 논의한 머리-꼬리 빔불안정성과 관련이 되어 있다. 하지만, 연속적인 전하 분포의 변화에 대해, Vlaov 방정식에 바탕을 둔 해석이 단순한 두 개의 거시입자에 바탕을 둔 모델에 비해, 좀 더 실제적인 기술방법을 제공한다. 보다 깊은 논의는 Chao의 교과서를 참고하기 바란다.¹²

¹²A. W. Chao, *Physics of collective beam instabilities in high energy accelerators*, John Wiley and Sons, 1993.

참고 문헌

- [1] A. Wolski, *Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators*, Imperial College Press, 2014.