가속기 빔동역학 강의 노트

(Andrzej Wolski 교과서 14장 [1])

정모세

UNIST 물리학과

2022년 5월 16일

제 14 장

웨이크 필드, 웨이크 함수 및 임피던스

서론

빔번치가 가속기 빔파이프 내부를 진행할 때, 빔번치 내의 각각의 입자들은 전자기장을 방출하며 다른 입자들의 운동에 영향을 미치게 된다. 공간전하 효과(space charge effect)와 산란 효과(scattering effect)가 그 대표적인 예가 되겠다. 공간전하 효과와 산란 효과는 빔파이프가 없는 자유공간에서도 원칙적으로 발생이 가능하다. 만약, 빔파이프가 존재한다면 이미지 전하가 유도되어 빔 운동에 영향을 미칠 수 있다. 일부 이러한 이미지 전하의 효과를 공간전하 효과에 의한 'Laslett tune shift'로 기술하기도 한다.

만약 입자의 운동이 상대론적이라면, 이렇게 빔파이프와 상호작용을 한 전자기장은 전자기장을 방출한 근원 입자(source particle)의 뒤를 따라오는 후행 입자(trailing particle)들에만 영향을 미치게 된다. 이러한 전자기장을 웨이크 필드(wake field)라고 부른다. 빔파이프 내부가 플라즈마로 채워져 있는 경우에는 플라즈마 파동에 의한 전자기장이 발생되는 데, 이것은 플라즈마 웨이크필드(plasma wakefield)라고 부르며, 이번 장에서 다룰 웨이크 필드와는 독립적으로 취급해야 할 주제이다. 높은 빔 에너지에서는 공간전하 효과와 산란 효과는 상대적으로 약해지며, 대신 웨이크 필드에 의한 효과가 지배적이 된다.

웨이크 필드는 공간과 시간에 의존하는 매우 복잡한 함수로 주어진다. 이러한 웨이크 필드가 가속기 내에서의 빔 거동에 어떤 영향을 미치는 지를 이해하기 위해서는 다소 간략화된 모형이 필요하며, 이것을 위해 도입된 것이 웨이크 함수(wake function)이다. 웨이크 함수는 국소(localized) 전하 분포 뒤를 따르는 후행 입자가 가속기 내부의 특정한 영역을 지날 때 어떻게 힘을 받는 지를 근사적으로 기술해 준다. 일반적으로, 웨이크 함수는 근원 입자와 후행 입자 사이의 거리만의 함수로 웨이크 필드를 표현한다. 이때, 모든 입자들은 빛의 속도로 상대론적 운동을 하고 있다고 가정한다.

웨이크 필드의 효과는 다양한 형태로 나타난다. 예를 들면, 빔진행(longitudinal) 및 횡단면(transverse) 방향으로의 이미턴스(emittance) 증가, 빔 분포의 왜곡, 빔불안정성 등이다. 빔불안정성은 특히 빔전류와 같은 가속기 운전조건에 제한을 가하게 된다. 설령, 빔이 불안정해지지 않는다 하더라도 웨이크 필드는 이미턴스와 같은 빔의 품질을 떨어뜨린다.

웨이크 필드가 존재하는 상황에서의 빔동역학 해석을 위해서는 주파수 공간을 이용하는 것이 종종 더 편리하다. 이때 특정한 하나의 주파수를 가지는 빔 밀도의 섭동을 다루게 된다. 빔불안정성이라 함은 시간에 따라 이러한 섭동이 지속적으로 증가할 때를 말한다. 웨이크 함수가 웨이크 필드를 시간 영역에서 기술한다면, 웨이크 함수의 푸리에 변환인 임피던스(impedance)는 웨이크 필드를 주파수 영역에서 기술한다. 빔 분포의 운동방정식을 임피던스를 이용하여 표현하면, 특정 주파수를 가지고 진동하는 빔 밀도 섭동에 대한 특성함수 방정식을 도출할 수 있다. 이때 진동 주파수의 허수부가 해당 섭동의 증가율을 나타내게 된다.

임의의 근원 입자 빔 분포가 주어졌을 때, 발생되는 웨이크 필드, 웨이크 함수, 그리고 임피던스를 특정한 가속기 구조에 대해 계산하는 것은 매우 복잡한 작업으로, 난이도 높은 수치해석 기법으로 맥스웰 방정식을 풀어야만 한다. 이번 장에서는 해석적인 방법으로 풀이가 가능한 비교적 단순한 두 가지의 예를 소개하기로 한다. 원거리(long range) 웨이크 필드에 의한 빔불안정성의 원인이 되는 대표적인 예로서 공동 공진기에서의 웨이크 필드와 저항성-벽면 웨이크 필드가 있다 [2].

제 1 절 공동 공진기에서의 웨이크 필드

이번 절에서는 점전하가 공동 공진기(resonant cavity)를 지날 때의 웨이크 필드 발생을 논의한다. 공동 공진기에서의 웨이크 필드는 기하학적 웨이크 필드의 대표적인 예이다. 즉, 빔이 진행하는 동안 빔파이프의 크기 또는 구조가 변함에 따라 웨이크 필드가 발생하게 된다.

먼저, 전하 q를 가지고 속도 v로 자유공간에서 등속 직선운동을 하는 점전하를 가정하자. 상대론적인 상황, $v \to c$에서 점전하 주위의 전기장은 입자 진행 방향의 수직한 면으로 납작하게 수축된다. 다음의 가우스 법칙을

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}, \tag{14.1}$$

맥스웰 방정식

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{14.2}$$

에 적용하면 다음의 관계식을 얻는다.

$$2\pi r \int_{-\infty}^{\infty} E_r\, ds = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{14.3}$$

여기서 원통좌표계 (r, θ, s)를 사용하였고, 방위각 θ에 대해서는 대칭을 가정하여 $dA = 2\pi r ds$로 놓았다. 상대론적인 상황($v \to c$)을 가정하였으므로, 전기장을 디락 델타 함수를 사용하여 다음과 같이

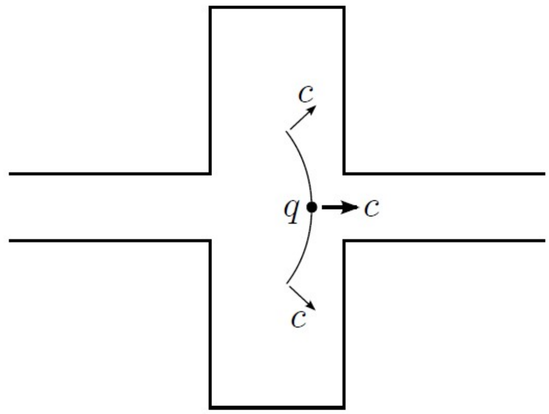

그림 14.1: 공동 공진기에서 발생되는 전자기장은 회절에 의해 중심축에서 멀리 퍼져나가는 구면파로 생각할 수 있다. 입자는 공동 공진기 반대편으로 빠져나가지만, 전자기장은 공동 공진기 내벽에 반사되어 웨이크 필드를 형성하고, 뒤에 오는 후행 입자에 영향을 준다. 공동 공진기의 경계는 $s = \pm L/2$로 주어진다. 입자와 파면 모두 광속으로 진행한다고 가정한다.

표현할 수 있다.

$$E_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\delta_{\mathrm{D}}(s - ct). \tag{14.4}$$

비슷한 방법으로 자기장을 구하면 다음과 같다.

$$B_\theta = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 cr}\delta_{\mathrm{D}}(s - ct).$$

이때, 전기장 E_r은 자기장 cB_θ와 같은 크기임을 알 수 있다. s는 입자 궤적을 따라서 측정되는 거리이다.

이제 이 입자가 도체면으로 이루어진 공동 공진기 내부로 입사되는 상황을 가정하자. 공동 공진기의 형태는 길이 L 및 반경 R을 가지는 원통이다. 입자는 공동 공진기에 나있는 (빔파이프에 연결된) 작은 구멍으로 들어가게 된다. 이 작은 구멍을 통과하면서, 입자 주위의 전자기장은 회절을 일으키게 되고, 더 이상 식 (14.4)으로는 기술이 되지 못한다. 만약, 이 구멍이 충분히 작다면, 전자기장은 구멍 중심에서부터 구면파를 이루면서 진행한다고 볼 수 있다. 입자는 공동 공진기 반대편의 구멍으로 빠져나가게 되지만, 전자기장은 공동 공진기 내벽에 반사되어 웨이크 필드를 형성한다.

빛의 속도로 움직이는 입자가 길이 L의 공동 공진기를 지날 때, 입자 주변의 전자기장도 근사적으로 L 정도의 거리를 퍼져나간다고 볼 수 있다. 구면파의 양끝과 중심이 빔 진행 방향으로 벌어진 거리 차이는 대략적으로 다음과 같이 근사될 수 있다.

$$\Delta s = L(1 - \cos\psi). \tag{14.5}$$

여기서 $\psi \sim 1 \sim 60°$로 놓는다. 즉, 공동 공진기의 크기가 너무 크지도 작지도 않게 적당하게 주어져서, $\psi \sim 1$을 만족한다고 임의로 가정한 것이다. 따라서 $\Delta s \approx L/2$로 놓을 수 있다. 이론 모형의 단순화를

위해 회절에 의해 만들어진 구면파를 평면파로 가정하자. 이 평면파는 상대론적 입자가 만들어 내는 전자기장과 그 크기는 같지만, 입자로부터 $L/2$ 거리만큼 뒤쳐져서 진행한다고 생각할 수 있다. 따라서, 공동 공진기 내부에 발생되는 전자기장에 대한 초기조건은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r}\delta_{\mathrm{D}}(s - ct + L/2). \tag{14.6}$$

즉, 점전하가 $s - ct = 0$을 만족하며 움직인다면, 공동 공진기 내부의 전자기장은 $s - ct = -L/2$에 형성된다.

이러한 초기조건의 전자기장이 어떤 형태로 변화해 나가는지를 보기위해, 전자기장을 공동 공진기 안에 형성되는 TM 모드들의 합으로 표현된다고 가정한다. 원통형 공동 공진기에서 하나의 TM 모드의 전기장은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$E_r = E_{lmn}\frac{k_l}{k_{mn}}J_n'(k_{mn}r)\cos(n\theta)\cos(k_l s)\cos(\omega_{lmn}t - \phi_{lmn}), \tag{14.7}$$

$$E_\theta = -E_{lmn}\frac{nk_l}{k_{mn}^2 r}J_n(k_{mn}r)\sin(n\theta)\cos(k_l s)\cos(\omega_{lmn}t - \phi_{lmn}), \tag{14.8}$$

$$E_s = E_{lmn}J_n(k_{mn}r)\cos(n\theta)\sin(k_l s)\cos(\omega_{lmn}t - \phi_{lmn}). \tag{14.9}$$

이에 해당하는 자기장은 다음과 같다.

$$B_r = E_{lmn}\frac{n\omega_{lmn}}{c^2k_{mn}^2 r}J_n(k_{mn}r)\sin(n\theta)\sin(k_l s)\sin(\omega_{lmn}t - \phi_{lmn}), \tag{14.10}$$

$$B_\theta = E_{lmn}\frac{\omega_{lmn}}{c^2k_{mn}r}J_n'(k_{mn}r)\cos(n\theta)\sin(k_l s)\sin(\omega_{lmn}t - \phi_{lmn}), \tag{14.11}$$

$$B_s = 0. \tag{14.12}$$

TM(transverse magnetic) 모드이기 때문에, $B_s = 0$이 된다. 여기서 ϕ_{lmn}는 초기조건에 의해 결정되는 고정된 위상이다. 양의 정수 $l \geq 1$은 빔진행 방향 모드를, 양의 정수 $m \geq 1$은 반경 방향 모드를, 그리고 0이상의 정수 $n \geq 0$은 방위각 방향 모드를 나타낸다. 맥스웰 방정식이 만족하려면, 다음의 관계식이 성립되야 한다.

$$\omega_{lmn}^2 = c^2(k_l^2 + k_{mn}^2). \tag{14.13}$$

이상적인 완전 도체면을 가정하면, 경계조건에 의해 접선방향의 전기장과 수직방향의 자기장은 도체면에서 없어진다. 이러한 경계조건을 원통 옆면에 적용하면,

$$k_{mn} = \frac{p_{mn}}{R}. \tag{14.14}$$

여기서, p_{mn}은 n차 베셀함수 $J_n(x)$가 0이 되게 하는 m번째 해이다. 마찬가지로 경계조건을 공동 공진기 양 끝면($s = \pm L/2$)에 적용하면,

$$k_l = (2l - 1)\frac{\pi}{L}. \tag{14.15}$$

공동 공진기 중심축을 따라 진행하는 전하에 의해 생성되는 전자기장은 대칭성에 의해 방위각 θ에 대한 의존성은 가지지 않게 된다. 따라서, 다음을 반드시 만족해야 한다.

$$E_{lmn} = 0 \quad \text{if} \quad n \neq 0. \tag{14.16}$$

이때, 반경 방향으로의 전기장은 다음과 같이 무한급수의 합으로 표현될 수 있다.

$$E_r = \sum_{l,m=1}^{\infty} E_{lm} \frac{k_l}{k_m} J_0'(k_m r) \cos(k_l s) \cos(\omega_{lm} t - \phi_{lm}). \tag{14.17}$$

여기서, $n = 0$만 고려하였으므로, 편의상 여러 변수에 나타나는 첨자 n은 생략하였다.

이제 반경 방향 전기장의 크기를 결정하는 계수 E_{lm}을 초기조건으로부터 구해보자. 식 (14.6)의 디락 델타 함수를 다음과 같이 무한급수로 전개하여 계수를 구하면 아래와 같다.

$$\delta_{\rm D}(s - ct + L/2) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos(k_l s) = \frac{4}{L} \sum_{l=1}^{\infty} \cos(k_l s) \cos(k_l(ct - L/2)). \tag{14.18}$$

식 (14.17)과 (14.18)을 비교하면, 먼저 위상 ϕ_{lm}는 다음과 같이 추측할 수 있다.

$$\phi_{lm} = k_l \frac{L}{2} = (2l - 1)\frac{\pi}{2}. \tag{14.19}$$

위의 식은 특수한 물리적 상황($L \ll R$, $\omega_{lm} \approx k_l c$)에서만 만족하는, 위상에 대한 근사적인 식이다. 계속해서 계수 E_{lm}을 구하기 위해 식 (14.6)에 있는 반경 r에 대한 의존성을 베셀 함수로 전개한다. 만약 임의의 함수 $f(\bar{r})$이 다음과 같이 $0 < \bar{r} < 1$ 에 대해 무한급수로 표현된다면,

$$f(\bar{r}) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} J_n(p_{mn} \bar{r}), \tag{14.20}$$

베셀 함수의 직교성에 의해 계수 C_{mn}을 다음과 같이 얻는다.

$$C_{mn} = \frac{2}{J_{n\pm1}(p_{mn})^2} \int_0^1 \bar{r} f(\bar{r}) J_n(p_{mn}\bar{r}) d\bar{r}. \tag{14.21}$$

여기서, 보통은 $J_{n+1}(p_{mn})$을 취하는데, $J_{n+1}(p_{mn}) = -J_{n-1}(p_{mn})$이기 때문에 $n \geq 1$인 경우 위와 같이 표현해도 무방하다. 이제 다음과 같이 놓자.

$$f(\bar{r}) = \ln(\bar{r}). \tag{14.22}$$

여기서 $\bar{r} = r/R$ 이다. 따라서,

$$\ln(\bar{r}) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} J_n(p_{mn} \bar{r}), \tag{14.23}$$

이고, 위 식을 $\bar{r}$으로 미분하면,

$$\frac{R}{r} = \sum_{m=1}^{\infty} p_{mn} C_{mn} J_n'\left(p_{mn} \frac{r}{R}\right), \tag{14.24}$$

이고, 계수 C_{mn}은 앞의 베셀 함수에 대한 공식을 이용하여 다음과 같이 얻는다.

$$C_{mn} = \frac{2}{J_{n+1}(p_{mn})^2} \int_0^1 x \ln(x) J_n(p_{mn}x) dx. \tag{14.25}$$

이제 식 (14.18)와 (14.24)를 이용하면, 식 (14.6)은 다음과 같이 표현된다.

$$E_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{4}{LR} \sum_{l,m=1}^{\infty} p_m C_m J_0'\left(p_m \frac{r}{R}\right) \cos(k_l s) \cos(k_l(ct - L/2)). \tag{14.26}$$

앞에서와 마찬가지로, 대칭성에 의해 $n = 0$만 고려하고 첨자 n은 생략하였다. 즉, $C_m = C_{m0}$이다. 만약, $L \ll R$이면(즉, 공동 공진기가 길이 방향으로 매우 짧다면), 작은 l 및 m 값들에 대해 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\omega_{lm} \approx k_l c. \tag{14.27}$$

또는, $k_l \gg k_{mn}$으로 생각할 수 있다. 식 (14.25)를 직접 계산해 보면 (매스매티카 등을 이용하여), 근사적으로 $p_m C_m \approx -\pi$가 됨을 확인할 수 있다. 이제, 식 (14.17)과 (14.26)을 비교하면, 우리가 구하고자 했던 계수 E_{lm}를 얻는다.

$$E_{lm} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \frac{8p_m}{(2l-1)} = -\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right) \frac{q}{R^2} \frac{8p_m}{(2l-1)}. \tag{14.28}$$

여기서, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$는 진공의 임피던스 값인데, 주목할 점은 $(Z_0 c/4\pi)$라는 값을 별도의 항으로 분리해서 표현했다는 점이다. 이렇게 한 이유는 SI 단위계에서 cgs 단위로의 변환을 쉽게하기 위함이다. 이 책에서는 SI 단위계를 사용하고 있지만, 웨이크 필드 해석에 cgs 단위도 많이 사용되고 있다. 다음과 같은 변환을 통해 쉽게 단위 변환이 가능하다.

$$\frac{Z_0 c}{4\pi} = 1 \quad \text{(cgs units)}. \tag{14.29}$$

식 (14.28)을 이용하면, 공동 공진기 중심축상을 진행하는 점전하에 의해 발생되는 전자기장에 대한 표현식을 시간과 위치의 함수로 얻을 수 있다. 예를 들면, 빔진행 방향으로의 전기장은

$$E_s = -\frac{Z_0 c}{4\pi} \frac{q}{R^2} \sum_{l,m=1}^{\infty} \frac{8p_m}{(2l-1)} J_0(k_m r) \sin(k_l s) \cos(\omega_{lm}(t - L/2c)), \tag{14.30}$$

이다. 우리가 지금까지 사용한 가정들 때문에 위 식은 $L \ll R$일 때, 그리고 l 및 m이 작은 값일 때만 유효하다. 그리고 인과율(causality)을 만족해야하기 때문에, (14.30)에서 시간의 범위를 $t > L/2c$로 제한해야 한다. 즉, 입자가 공동 공진기의 끝면($s = L/2$)을 지난 이후에 웨이크 필드가 유도된다고 봐야한다. 식 (14.30)의 전기장은 일종의 정상파로서, $-L/2 < s < L/2$에서 값을 가진다. 따라서 시간의 범위를 제한하진 않으면, 근원 입자의 앞쪽에서도 전기장이 존재하는 모순이 생긴다.

Quality factor

식 (14.30)만 보면, 공동 공진기 안의 웨이크 필드는 입자가 빠져나간 이후에도 계속 지속되는 것처럼 보인다. 하지만, 실제로는 웨이크 필드를 감쇠시키는 물리적 기작들이 존재한다. 특히, 웨이크 필드의 에너지 일부는 공동 공진기에 연결된 빔파이프로 누설이 되기도 하고, 일부는 공동 공진기 벽면에 유도되는 전류에 의해 열에너지의 형태로 소멸되기도 한다. 이러한 감쇠를 일으키는 기작들이 지금까지 논의한 단순화된 이론 모형에는 포함되어있지 않지만, 실제로는 항상 고려를 해야 한다. 특정한 주파수의 모드에 대해 전자기장이 감쇠되는 정도는 품질인자(quality factor) Q로 기술한다.

$$Q = 2\pi\frac{\mathcal{E}}{U} = \omega\frac{\mathcal{E}}{U/T}. \tag{14.31}$$

여기서 $\mathcal{E}$는 공동에 저장된 특정한 모드의 에너지이고, U는 한 진동주기($T = 2\pi/\omega$)에 잃는 에너지이다. 따라서, 단위시간당의 에너지 감쇠는 U/T가 된다. 만약 $Q \gg 1$, 즉, $U \ll \mathcal{E}$인 경우, 저장된 에너지는 $d\mathcal{E}/dt = -U/T = -\omega\mathcal{E}/Q$의 비율로 감쇠되므로,

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)\exp\left(-\frac{\omega t}{Q}\right), \tag{14.32}$$

의 형태로 지수적으로 줄어든다. 특정한 주파수 모드에 대한 품질인자는 공동 공진기 내부에 형성되는 전자기장의 분포, 공동 공진기의 기하학적인 구조 및 벽면 재료 등에 영향을 받는다. 가속기 빔파이프에서 공동 공진기 구조는 의도치 않게 나타나는 경우가 있다. 예를 들면, 빔파이프의 모양이나 크기가 변화하는 구간이 있다거나, 진공 벨로우즈, 진공 펌프, 빔진단/제어 장치 등이 삽입되는 경우가 해당되겠다. 이러한 경우에는 품질인자가 대체적으로 작기 때문에, 유도된 전자기장은 급격히 감쇠하게 된다. 심지어 그 다음 빔 번치가 오기전에 상당 부분 감쇠가 되기도 한다. 일반적으로는 공진 발생 가능성이 있는 빔파이프 구간에는 금속 조각을 이용하여 빔파이프가 가급적 매끈하고 연속적으로 보이도록 해서 공진을 차폐하는 작업을 해야 한다. 반면, 가속관으로 쓰이는 공동 공진기의 경우에는 가속 효율이 떨어질 것이므로 이러한 차폐를 할 수 없다. 가속관의 경우에는 품질인자가 매우 높아서, 초전도 가속관에서는 $Q \sim 10^9$ 정도이다. 이러한 가속관에서 유도되는 웨이크 필드는, 기본모드(fundamental mode)이든 고차모드(higher-order modes, HOMs)이든, 가속기에서의 빔동역학에 영향을 미치므로 반드시 고려해야 한다. 보통 가속관은 빔불안정성을 피하기 위해 고차모드를 감쇠할 수 있도록 설계가 되어있다. 고차모드의 감쇠는 짧은 도파관 역할을 하는 구조물을 가속관에 부착하여 고차모드의 전자기장 에너지가 가속관 밖으로 빠져나가도록 해서 이루어 질 수 있다. 이렇게 빠져나간 에너지는 페라이트(ferrite) 부하에서 반사없이 안전하게 처리된다.

이제 다시 식 (14.30)으로 돌아가서, 감쇠효과를 적절한 지수 항을 도입해서 근사적으로 포함시키도록 한다. 일반적으로 감쇠항은 조화진동자의 공진 주파수 ω_r을 변화시킨다. 다음과 같은 감쇠 조화진동자의 경우

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_r^2 x = 0. \tag{14.33}$$

그 해는

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\bar{\omega}_r t - \phi), \tag{14.34}$$

로 주어진다. 여기서

$$\bar{\omega}_r = \sqrt{|\omega_r^2 - \alpha^2|}, \tag{14.35}$$

이다. 공동 공진기에서 높은 주파수의 모드들은 낮은 주파수의 모드들보다 훨씬 빨리 감쇠가 일어난다. 따라서 웨이크 필드에 의한 효과는 가장 낮은 주파수의 모드($l = m = 1$의 경우)에 의해 지배적으로 결정된다고 가정할 수 있다. 이러한 경우 $\omega_{lm}L/2c = \omega_{11}L/2c \approx ck_1L/2c \approx \pi/2$이 된다. 추가적으로 중심축상에서($r = 0$)의 값만을 고려하면, 빔 진행 방향으로 발생되는 전기장은 아래와 같이 표현된다.

$$E_s = -\frac{Z_0 c}{4\pi}\frac{8p_1 q}{R^2}e^{-\alpha t}\sin(k_1 s)\sin(\bar{\omega}_r t). \tag{14.36}$$

여기서 사용된 변수들은 다음과 같이 정의되었다.

$$k_1 = (2\times 1 - 1)\frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{L}, \tag{14.37}$$

$$\omega_r = \omega_{11} = k_1 c, \tag{14.38}$$

$$\alpha = \frac{\omega_r}{2Q}. \tag{14.39}$$

지수 항에 있는 전기장 크기의 감쇠율 α는 에너지(전기장 크기의 제곱에 비례) 감쇠율의 절반이 됨을 확인할 수 있다.

Longitudinal force

이렇게 발생된 축방향의 전기장은 후행 입자에 빔진행 방향으로 힘을 작용시킨다. 결과적으로 받게 되는 빔진행 방향으로의 운동량 변화는 빔진행 방향 전기장을 공동 공진기 길이에 대해 적분한 값에 비례하게 된다. 웨이크 필드를 발생시키는 근원 입자와 뒤따르는 후행 입자 모두 광속으로 진행하므로, 후행 입자의 근원 입자에 대한 상대적 위치 $z < 0$는 아래의 구속 요건을 만족한다.

$$z = s - ct = \text{constant}. \tag{14.40}$$

주어진 $z < 0$에 대해, 식 (14.36)을 $t = (s - z)/c$로 치환 후에 공동 공진기 길이 s에 대해 적분하면, z만의 함수로 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\int_{-L/2}^{L/2} E_s(s - ct = z)ds \approx -\frac{Z_0 c}{4\pi}3q\frac{L^2}{R^2}\frac{\omega_r}{c}e^{\alpha z/c}\cos\left(\frac{\bar{\omega}_r z}{c}\right). \tag{14.41}$$

근원 입자 앞 쪽에서는($z > 0$) 아무런 웨이크 필드가 발생되지 않으므로 $E_s = 0$이다. 앞에서 논의한 초기조건에 의해, 위 적분값은 엄밀하게 말하면 $z < -L/2$에서만 유효하다. 하지만, 대략적인 크기를 확인하기 위해 $z \to 0^-$로 극한을 취하면, 위 적분값의 부호는 $-q$에 비례함을 볼 수 있다. 즉, 후행 입자와 선행 입자의 전하 부호가 같다면, $-s$ 방향으로 합력이 작용하게 된다.

우리가 지금까지 논의한 표현식들은 매우 단순화된 가정을 통해 얻어진 것이고, 좀더 실제적인 상황에서의 웨이크 필드 계산을 위해서는 맥스웰 방정식을 주어진 기하구조에 대해 수치적으로 풀어야 한다.

또한, 일반적으로는 횡단면 방향으로도 웨이크 필드에 의한 힘이 발생된다. 이러한 횡단면 방향으로의 힘은 후행 입자와 선행 입자 사이의 빔진행 방향 거리 z뿐만 아니라, 웨이크 필드를 느끼는 후행 입자의 수직방향 위치 r에도 의존하게 된다. 그리고, 빔진행 방향 및 횡단면 방향으로의 힘은 맥스웰 방정식에 의해 서로 연결이 되어있다.

제 2 절 저항성-벽면 웨이크 필드

이번 절의 목표는 가속기 빔파이프 내에서 특정한 빔 분포 주변에 생기는 전자기장을 계산해 보는 것이다. 특별한 경우로 원형 단면의 긴 원통형의 빔파이프를 고려하고, 두께는 무한히 얇지만 전기 전도도 (electrical conductivity)는 유한한 값을 가진다고 가정하자. 빔파이프는 보통 구리 또는 알루미늄으로 만들어지는데, 분명 좋은 전도체이긴 하지만 완전도체는 아니다 [2]. 이러한 상황에서의 웨이크 필드는 빔파이프의 전기 전도도에 직접적으로 의존하게 되는데, 이를 저항성-벽면 웨이크 필드(resistive-wall wake field)라고 보통 부른다. 만약 선행 입자의 빔 분포를 특수하게 가정하면, 웨이크 함수를 도입하여 단순화된 형태로 웨이크 필드를 기술할 수 있다. 웨이크 함수는 웨이크 필드를 편리하게 표현할 수 있어서 빔동역학 연구에 유용하며, 다음 절에서 좀 더 자세히 논의하기로 한다.

기하학적 웨이크 필드는 진공챔버의 모양이나 크기가 변할 때 생성되고, 그 대표적인 예가 앞 절에서 논의했던 공동 공진기에서의 웨이크 필드 발생이다. 빔파이프의 모양이 완벽히 일정한 경우라 하더라도, 빔파이프 재질의 전기 전도도가 유한하다면 역시 웨이크 필드가 발생될 수 있다. 이러한 저항성-벽면 웨이크 필드는 가속기에서 매우 중요하며, 이번 절에서는 Chao [2]의 방법론을 따라 관련 내용을 소개한다.

웨이크 필드의 발생 양상은 진공챔버의 크기, 모양, 전기 전도도 등에 의존할 뿐만 아니라, 근원 입자의 빔 분포에도 영향을 받는다. 완전히 일반적인 빔 분포는 해석적으로 다루기가 어렵기 때문에, 가장 단순한 점전하 또는 다음과 같은 고리 모양의 빔 분포를 주로 가정한다.

$$\rho = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_m}{\pi(1+\delta_{m0})a^{m+1}} \cos(m\theta)\delta_{\mathrm{D}}(r-a)\delta_{\mathrm{D}}(s-ct). \tag{14.42}$$

여기서 ρ는 전하 밀도, θ는 $x = 0$에서 부터의 각도, a는 고리의 반지름으로 상수이다. δ_{m0}는 크로네커

델타 함수이고, $\delta_{\rm D}(x)$는 디락 델타 함수이다. 디락 델타 함수는 변수 x의 역수의 단위를 가진다. 이러한 전하 밀도에서 모든 전하는 반지름 a의 고리에 분포하여 존재하고, 고리의 중심은 기준 궤적을 따라 $s = ct$로 움직인다. 계수 I_m은 전하 분포의 다중극 모멘트(multipole moments)로서 다음과 같이 주어진다.

$$I_m = \mathrm{Re} \int (x + iy)^m \rho \; dV. \tag{14.43}$$

전체공간에 대한 적분 $\int \rho dV$가 전하량의 단위를 가지므로, I_m은 [charge]$\times$[length]^{m}의 단위를 갖는다. $m = 0$이라면, $I_0 = \mathrm{Re} \int \rho dV = q$, 그리고 $m = 1$이라면, $I_1 = \mathrm{Re} \int (x + iy)\rho dV = q\langle x\rangle$이다.

만약, 총 전하량 q가 균일하게 고리에 분포되어 있다면 다음과 같은 식들을 얻는다.

$$\rho = \frac{q}{2\pi a}\delta_{\rm D}(r - a)\delta_{\rm D}(s - ct), \tag{14.44}$$

$$I_m = \begin{cases} q & \text{for} \quad m = 0, \\ 0 & \text{for} \quad m \neq 0. \end{cases} \tag{14.45}$$

또한, 점전하 q가 $r = a, \theta = 0$, 즉, $x = a, y = 0$인 선을 따라 진행한다면 다음의 식들을 얻는다.

$$\rho = q\frac{\delta_{\rm D}(\theta)}{a}\delta_{\rm D}(r - a)\delta_{\rm D}(s - ct) = q\delta_{\rm D}(x - a)\delta_{\rm D}(y)\delta_{\rm D}(s - ct), \tag{14.46}$$

$$I_m = qa^m. \tag{14.47}$$

위의 관계식은 디락 델타 함수의 푸리에 급수전개로 부터도 확인할 수 있다.

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} \cos(mx).$$

이제 식 (14.42)의 전하 밀도 분포를 가지고, 반지름 b인 긴 원통형 진공챔버 내를 진행하는 빔을 가정하자. 이 빔 주변에 발생되는 전자기장은 다음의 맥스웰 방정식을 만족한다.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{14.48}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{14.49}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}, \tag{14.50}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \tag{14.51}$$

여기서

$$\mathbf{j} = c\rho\hat{s}, \tag{14.52}$$

은 전류 밀도이고, $\hat{s}$는 기준 궤적 방향으로의 단위 벡터이다. 주어진 전하 밀도 분포에 대한 해를 구하기 위해, 다음과 같이 전자기장을 θ 및 s에 대한 푸리에 급수로 표현한다.

$$\mathbf{E} = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \frac{dk}{2\pi} \left(\cos(m\theta) \tilde{E}_r, \sin(m\theta) \tilde{E}_\theta, \cos(m\theta) \tilde{E}_s \right), \tag{14.53}$$

$$\mathbf{B} = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \frac{dk}{2\pi} \left(\sin(m\theta) \tilde{B}_r, \cos(m\theta) \tilde{B}_\theta, \sin(m\theta) \tilde{B}_s \right). \tag{14.54}$$

여기서 우리는 $\rho \propto \delta_{\mathrm{D}}(s - ct)$을 고려하여 다음과 같은 변수를 도입하였다.

$$z = s - ct. \tag{14.55}$$

각각의 전자기장 성분에 포함되어 있는 θ에 대한 의존성은 맥스웰 방정식에 의해 결정되었다. 식 (14.53)과 (14.54)를 맥스웰 방정식에 대입하면, 푸리에 계수들에 대한 관계식들을 얻을 수 있다. 식 (14.48) 및 (14.49)으로부터

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\tilde{E}_r)}{\partial r} + ik\tilde{E}_s + \frac{m}{r}\tilde{E}_\theta = \frac{\tilde{\rho}_m(r,k)}{\varepsilon_0}, \tag{14.56}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r\tilde{B}_r)}{\partial r} + ik\tilde{B}_s - \frac{m}{r}\tilde{B}_\theta = 0. \tag{14.57}$$

식 (14.50)으로부터

$$-\frac{m}{r}\tilde{E}_s - ik\tilde{E}_\theta - ikc\tilde{B}_r = 0, \tag{14.58}$$

$$ik\tilde{E}_r - \frac{\partial \tilde{E}_s}{\partial r} - ikc\tilde{B}_\theta = 0, \tag{14.59}$$

$$\frac{m}{r}\tilde{E}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\tilde{E}_\theta)}{\partial r} - ikc\tilde{B}_s = \mu_0 c\tilde{\rho}_m(r,k). \tag{14.60}$$

마지막으로 식 (14.51)로부터

$$\frac{m}{r}\tilde{B}_s - ik\tilde{B}_\theta + \frac{ik}{c}\tilde{E}_r = 0, \tag{14.61}$$

$$ik\tilde{B}_r - \frac{\partial \tilde{B}_s}{\partial r} + \frac{ik}{c}\tilde{E}_\theta = 0, \tag{14.62}$$

$$-\frac{m}{r}\tilde{B}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial (r\tilde{B}_\theta)}{\partial r} + \frac{ik}{c}\tilde{E}_s = 0. \tag{14.63}$$

여기서 $\tilde{\rho}_m(r,k)$ 는 전류 밀도의 푸리에 변환 계수이다.

$$\rho = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \frac{dk}{2\pi} \cos(m\theta) \tilde{\rho}_m(r,k). \tag{14.64}$$

따라서, 식 (14.42)에 의해

$$\tilde{\rho}_m(r,k) = \frac{I_m}{\pi(1+\delta_{m0})a^{m+1}} \delta_{\mathrm{D}}(r-a). \tag{14.65}$$

$r = a$인 지점을 제외하고 나면, $\tilde{\rho}_m(r,k) = 0$이다. 따라서 $r < a$인 영역에 대해 식 (14.56)–(14.63)을 적분하면,

$$\tilde{E}_r = C_m^{(0)}\bar{r}^{-m-1} + C_m^{(1)}\bar{r}^{m-1} - \frac{ikbC_m^{(2)}}{2(m+1)}\bar{r}^{m+1}, \tag{14.66}$$

$$\tilde{E}_\theta = C_m^{(0)}\bar{r}^{-m-1} - C_m^{(1)}\bar{r}^{m-1} - \frac{ikbC_m^{(2)}}{2(m+1)}\bar{r}^{m+1}, \tag{14.67}$$

$$\tilde{E}_s = C_m^{(2)}\bar{r}^{m}, \tag{14.68}$$

$$c\tilde{B}_r = -C_m^{(0)}\bar{r}^{-m-1} + \left(C_m^{(1)} + \frac{imC_m^{(2)}}{kb}\right)\bar{r}^{m-1} + \frac{ikbC_m^{(2)}}{2(m+1)}\bar{r}^{m+1}, \tag{14.69}$$

$$c\tilde{B}_\theta = C_m^{(0)}\bar{r}^{-m-1} + \left(C_m^{(1)} + \frac{imC_m^{(2)}}{kb}\right)\bar{r}^{m-1} - \frac{ikbC_m^{(2)}}{2(m+1)}\bar{r}^{m+1}, \tag{14.70}$$

$$c\tilde{B}_s = -C_m^{(2)}\bar{r}^{m}. \tag{14.71}$$

여기서 편의상 다음을 정의하였다.

$$\bar{r} = \frac{r}{b}. \tag{14.72}$$

그리고, $C_m^{(0)}, C_m^{(1)}$ 및 $C_m^{(2)}$는 적분상수로서(단위는 포텐셜 차이), 경계조건에 의해 결정이 된다. 그 다음으로 $r > a$인 영역에 대해서도 적분상수만 다른 정확히 같은 형태의 식들을 얻는다. 이 영역에서의 적분상수는 $\bar{C}_m^{(0)}, \bar{C}_m^{(1)}$ 및 $\bar{C}_m^{(2)}$로 구분하여 표현한다. 특별히 $m = 0$인 경우는, 적분상수의 갯수가 줄어드는데, 식 (14.66)–(14.71)에서 다음과 같이 놓으면 간편히 처리가 가능하다.

$$C_0^{(1)} = \bar{C}_0^{(1)} = 0. \tag{14.73}$$

만약, $b \to \infty$라면, 즉 빔이 진공챔버없이 자유공간을 진행한다면, 0이 아닌 유일한 항은 적분상수 $C_m^{(0)}$ 또는 $\bar{C}_m^{(0)}$가 들어간 항, 즉, r^{-m-1}의 의존성을 같는 항이 될 것이다. 왜냐하면, $C_m^{(1)}, \bar{C}_m^{(1)}, C_m^{(2)}, \bar{C}_m^{(2)}$이 들어간 항, 즉, r^{m-1} 및 r^{m+1}의 의존성을 같는 항들이 $b \to \infty$인 경우에 0이 안된다면, 국소 전하분포로부터 무한대 떨어진 지점에서도 전자기장이 유한하게 되어 물리적으로 맞지 않게 된다. 이제, $C_m^{(0)}$ 또는 $\bar{C}_m^{(0)}$의 값을 얻기위해, q라는 점전하가 $r = a$, $\theta = 0$이라는 위치를 가지고 자유공간에서 진행한다고 가정해보자. 맥스웰 방정식의 가우스 법칙을 점전하 주위의 반지름 r_0를 가지는 무한한 원통에 대해 적분하면,

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} E_r r_0 d\theta' dz = 2\pi r_0 \int_{-\infty}^{\infty} E_r dz = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{14.74}$$

여기서 우리는 점전하 주위의 전기장이 (진공챔버가 없는 자유공간에서) 회전대칭(점전하 주위로의 각도 θ'에 대해)을 가진다는 것을 이용하였다. 푸리에 전개식 (14.53)을 적용하면,

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_r dz = \sum_{m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz}\frac{dk}{2\pi}\cos(m\theta)\tilde{E}_r(k) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r_0}. \tag{14.75}$$

먼저 z에 대한 적분은 디락 델타 함수가 된다. 즉, $\delta(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} dz/2\pi$이다. 따라서, 남은 k에 대한 적분은 단순히 $\tilde{E}_r(k=0)$이 된다. 푸리에 전개의 계수 $\tilde{E}_r$은 관찰 지점의 각도 θ에 무관하므로 (Jackson 의 전기역학 교과서 3.3절 참고 [3]), 편의상 원점 주변의 각도 $\theta = 0$인 지점을 고려하자. 이 상황에서 $r_0 = r - a$를 이용하면,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{E}_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^m = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{m+1}. \tag{14.76}$$

위 식을 식 (14.66)과 비교하면, $r > a$에 대해 다음과 같이 유추할 수있다.

$$\bar{C}_m^{(0)} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a} \left(\frac{a}{b}\right)^{m+1}. \tag{14.77}$$

이 상황에서 점전하에 대한 다중극 모멘트가 $I_m = qa^m$으로 주어지므로,

$$\bar{C}_m^{(0)} = \frac{I_m}{2\pi\varepsilon_0 b^{m+1}}. \tag{14.78}$$

위 식은 분모에 $b \to \infty$가 되어 0이 되는 것 같지만, 실제 $\tilde{E}_r$의 계산에서는 $\bar{r}^{-m-1}$ 항에 있는 b와 약분이 되어 유한한 값을 준다. 특별히 $m = 0$인 경우

$$\bar{C}_0^{(0)} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 b}.$$

한편, $r < a$에 대해서는 $r_0 = a - r$을 이용하면,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{E}_r = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a} \sum_{m'=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{m'} = \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{qb^{m'}}{2\pi\varepsilon_0 a^{m'+1}} \left(\frac{r}{b}\right)^{m'} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{qb^{m-1}}{2\pi\varepsilon_0 a^m} \left(\frac{r}{b}\right)^{m-1}.$$

따라서, $b \to \infty$인 경우, $r < a$에 대해서는 $\bar{r}^{-m-1}$에 의존하는 항이 없으므로

$$C_m^{(0)} = 0. \tag{14.79}$$

대신,

$$C_0^{(1)} = 0, \; C_{m>0}^{(1)} = \frac{qb^{m-1}}{2\pi\varepsilon_0 a^m},$$

을 얻는다. 지금까지 $\bar{C}_m^{(0)}$ 및 $C_m^{(0)}$을 얻는 과정에서 점전하를 가정하였는데, 임의의 전하가 $r = a$인 고리에 분포하고 있다면, 점전하의 푸리에 결합으로 생각하여 일반화할 수 있다. 즉, 식 (14.78)에서 I_m을 일반화된 전하분포의 다중극 모멘트로 대입하면 된다.

이제 다시 진공챔버를 고려하되, 앞에서 구한 $\bar{C}_m^{(0)}$ 및 $C_m^{(0)}$의 값은 달라지지 않는다고 가정하자. ($C_{m>0}^{(1)}$은 달라질 것이므로, 다시 미지수로 생각한다.) 진공챔버가 있다면, 적분상수에 대해 다음과 같은 성질이 있음을 발견할 수 있다. 첫째, $\tilde{E}_s$와 $\tilde{B}_s$는 $r = a$에서 연속이다. 따라서,

$$C_m^{(2)} = \bar{C}_m^{(2)}. \tag{14.80}$$

둘째, $\tilde{E}_\theta$와 $\tilde{B}_r$는 $r = a$에서 연속이다. 따라서,

$$C_m^{(1)} = \bar{C}_m^{(1)} - \bar{C}_m^{(0)} \left(\frac{b}{a}\right)^{2m}. \tag{14.81}$$

결국, (각각의 m에 대해) 두 종류의 적분상수 $\bar{C}_m^{(1)}$와 $\bar{C}_m^{(2)}$ 만 미지수로 생각할 수 있다. 이 두 미지수는 진공챔버 내벽 $r = b$에서의 경계조건에 의해 결정되야 한다.

진공챔버가 전기 전도도 σ를 가지는 옴 도체(옴의 법칙을 만족하는 도체)로 만들어졌다고 가정하자. 이때 전류밀도는 다음과 같이 전기장에 비례한다.

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \tag{14.82}$$

이제 맥스웰 방정식을 진공챔버 내벽 안쪽에서 풀기위해, 전자기장을 앞에서와 마찬가지로 (즉, 식 (14.53) 및 (14.54) 처럼) 푸리에 급수로 표현한다. 맥스웰 방정식에서 전하 밀도 $\rho = 0$ 및 전류 밀도 $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ 로 놓고, 푸리에 급수 전개를 대입하면, 푸리에 계수에 대한 연립 미분방정식을 얻게 된다. 하지만, 이 연립 미분방정식의 해는 해석적으로 표현하기가 불가능하며, 다음과 같은 근사적인 해만이 $r > b$에 대해 알려져 있다.

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_r &= -C_m^{(3)} \frac{k}{\lambda} e^{i\lambda(r-b)}, && (14.83)\\
\tilde{E}_\theta &= C_m^{(4)} \frac{k}{\lambda} e^{i\lambda(r-b)}, && (14.84)\\
\tilde{E}_s &= C_m^{(3)} e^{i\lambda(r-b)}, && (14.85)\\
c\tilde{B}_r &= -C_m^{(4)} \frac{k}{\lambda} e^{i\lambda(r-b)}, && (14.86)\\
c\tilde{B}_\theta &= -C_m^{(3)} \left(\frac{k}{\lambda} + \frac{\lambda}{k}\right) e^{i\lambda(r-b)}, && (14.87)\\
c\tilde{B}_s &= C_m^{(4)} e^{i\lambda(r-b)}. && (14.88)
\end{aligned}$$

여기서,

$$\lambda^2 = ic\mu_0\sigma k, \tag{14.89}$$

이고, $C_m^{(3)}$ 및 $C_m^{(4)}$는 (포텐셜 차이의 단위를 가지는) 적분상수이다. 모든 전자기장이 $r \to \infty$에서 0으로 감쇠하기 위해서는 (식 (14.89)의 제곱근을 취해서 얻게 되는) λ가 양의 허수부를 반드시 가져야 한다. 즉,

$$\lambda = (i + \mathrm{sgn}(k))\sqrt{\frac{c\mu_0\sigma|k|}{2}} = \frac{i + \mathrm{sgn}(k)}{\delta_{\text{skin}}}. \tag{14.90}$$

여기서, $\mathrm{sgn}(k)$는 k의 부호를 주는 함수로서, k가 양수면 $+1$, k가 음수면 -1의 값을 가진다. 위 식에서 δ_{skin}는 진공챔버 벽면의 표피깊이(skin depth)이며, 전자기파의 크기가 $1/e$로 감쇠되는 데 걸리는 거리로 정의된다. 따라서, λ는 k와 마찬가지로 거리의 역수의 단위를 갖는다(파장이 아님에 유의하라).

미지수로 남은 적분상수들은 전자기장들을 $r = b$에서 매칭을 함으로써 얻을 수 있다. 진공챔버 표면에서 표면 전하가 유도될 가능성이 있기 때문에, 수직방향 전기장 E_r이 $r = b$ 전후에서 연속적이라고

할 수는 없다. 하지만, 옴 도체의 경우 표면 전류를 가정하기가 어렵기 때문에, 수평방향의 자기장은 연속적이라 놓아야 한다 (Jackson의 전기역학 교과서 8.1절 참고 [3]). 따라서, E_s와 B_s는 경계면 $r = b$ 주변에서 연속이다.

$$C_m^{(3)} = \bar{C}_m^{(2)}, \tag{14.91}$$

$$C_m^{(4)} = -\bar{C}_m^{(2)}. \tag{14.92}$$

또한, E_θ와 B_θ의 경계면 $r = b$ 주변에서의 매칭을 통해 다음의 관계식을 얻는다.

$$\bar{C}_m^{(2)} = \frac{2\bar{C}_m^{(0)}}{\frac{ikb}{m+1} - \frac{\lambda}{k} - \frac{im}{kb} - 2\frac{k}{\lambda}}, \tag{14.93}$$

$$\bar{C}_m^{(1)} = -\frac{im + b\lambda}{2kb}\bar{C}_m^{(2)}. \tag{14.94}$$

$m = 0$에 대해서는 이미 $\bar{C}_0^{(1)} = 0$으로 놓았기 때문에, 하나의 적분상수 $\bar{C}_0^{(2)}$만 결정을 하면 된다. B_θ를 $r = b$ 주변에서 매칭을 하면,

$$\bar{C}_0^{(2)} = \frac{2\bar{C}_0^{(0)}}{ikb - 2\frac{\lambda}{k} - 2\frac{k}{\lambda}}. \tag{14.95}$$

$\bar{C}_m^{(2)}$ 및 $\bar{C}_m^{(1)}$을 다음과 같이 정의된 무차원 변수 ξ로 급수전개하여 근사적으로 표현하면 편리하다.

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{c\mu_0\sigma b}} = \delta_{\text{skin}} \times \sqrt{\frac{|k|}{b}}. \tag{14.96}$$

이제 $\lambda = (i + \text{sgn}(k))(b/|k|)^{1/2}\xi$를 식 (14.93)와 (14.94)에 대입하고, ξ의 1차항까지 전개하면, $m > 0$에 대해

$$\begin{aligned}\frac{\bar{C}_m^{(2)}}{\bar{C}_m^{(0)}} &= (i\text{sgn}(k) - 1)(|k|b)^{1/2}\xi + O((|k|b)^2\xi^2), \\ &= (|k|b)^{1/2}\xi\left[(i\text{sgn}(k) - 1) + O((|k|b)^{3/2}\xi)\right],\end{aligned} \tag{14.97}$$

$$\frac{\bar{C}_m^{(1)}}{\bar{C}_m^{(0)}} = 1 + (i\text{sgn}(k) + 1)\frac{(|k|b)^{3/2}}{2(m+1)}\xi + O((|k|b)^3\xi^2). \tag{14.98}$$

그리고 $m = 0$에 대해

$$\frac{\bar{C}_0^{(2)}}{\bar{C}_0^{(0)}} = (i\text{sgn}(k) - 1)\frac{(|k|b)^{1/2}}{2}\xi + O((|k|b)^2\xi^2), \tag{14.99}$$

$$\bar{C}_0^{(1)} = 0, \tag{14.100}$$

을 얻는다. ξ는 k에 대한 의존성이 없음으로, $\bar{C}_m^{(2)}$ 및 $\bar{C}_m^{(1)}$의 k에 대한 의존성은 위의 식에 명시적으로 나타나게 된다. 이러한 성질은 나중에 푸리에 변환을 통해 전자기장 성분을 표현하는데 편리하다. 그리고 위의 급수 전개식의 고차항을 보면($O((|k|b)^{3/2}\xi)$), $\bar{C}_m^{(2)}$ 및 $\bar{C}_m^{(1)}$이 수렴하기 위한 조건은

$$|k|b \ll \xi^{-2/3}, \tag{14.101}$$

임을 알 수 있다. 이제 파수(k) 공간에서 좌표계(z) 공간으로의 변환을 생각하면, 위의 수렴 조건은

$$|z| \gg b\xi^{2/3} = \sqrt[3]{\frac{2b^2}{c\mu_0\sigma}}. \tag{14.102}$$

즉, 주어진 전기 전도도과 빔파이프 반지름에 대해, 지금까지의 결과가 유효한 최소한의 $|z|$ 값이 존재한다. 예를 들어, 만약 진공챔버가 알루미늄($\sigma = 3.55 \times 10^7\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$)으로 만들어져 있고, 지름이 40 mm 라면, ξ의 값은 대략 10^{-4} 정도이다. 따라서, 위에서 유도한 ξ에 대한 1차항 까지의 급수 전개식은 $|z| \gg 40\ \mu$m에서 유효하게 된다. 이러한 $|z|$의 범위에서는 각각의 빔번치 내부에서 근거리 (short range) 웨이크 필드가 빔동역학에 어떤 영향을 미치는 지는 알아보기 어렵다. 대신, 저장링에서 저항성-벽면 웨이크 필드에 의한 서로 다른 번치와 번치간의 결합현상을 기술하는 데는 유효할 것이다.

이제 실공간에서의 전자기장은 지금까지 구한 푸리에 계수를 식 (14.53) 및 (14.54)에 대입하여 얻을 수 있다. 빔진행 방향의 성분을 계산하기 위해 다음의 관계식을 이용한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz}\frac{dk}{2\pi}(i\mathrm{sgn}(k)-1)|k|^{1/2} = \frac{1-\mathrm{sgn}(z)}{2\sqrt{2\pi}|z|^{3/2}}, \tag{14.103}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz}\frac{dk}{2\pi}(i\mathrm{sgn}(k)+1)|k|^{3/2} = -\frac{3(1-\mathrm{sgn}(z))}{4\sqrt{2\pi}|z|^{5/2}}. \tag{14.104}$$

여기서 주목할 점은 위 식에서 우변이 $z > 0$에서는 0이 된다는 점이다. 즉, 근원 입자 앞에서는 전자기장이 존재치 않고 인과율을 만족하게 된다. $0 < r < b, z < 0$, 그리고 $|z| \gg b\xi^{2/3}$인 경우에 다음과 같이 빔진행 방향 성분의 전자기장을 구할 수 있다.

$$E_s = \sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right)\frac{c}{\sigma}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{I_m r^m\cos(m\theta)}{(1+\delta_{m0})\pi b^{2m+1}}\frac{1}{|z|^{3/2}}, \tag{14.105}$$

$$cB_s = -\sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right)\frac{c}{\sigma}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{I_m r^m\cos(m\theta)}{\pi b^{2m+1}}\frac{1}{|z|^{3/2}}. \tag{14.106}$$

여기서 Z_0는 자유 공간에서의 임피던스로 아래와 같이 주어진다.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_0}}. \tag{14.107}$$

위의 식 (14.105)와 (14.106)는 아래의 인자가 명시적으로 나타나도록 표현하였는데, 이는 단위계의 변환을 쉽게 하기위함이다.

$$\frac{Z_0 c}{4\pi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \text{(SI units)}, \tag{14.108}$$

$$\frac{Z_0 c}{4\pi} = 1 \quad \text{(cgs units)}. \tag{14.109}$$

마찬가지 방법으로 나머지 성분들도 푸리에 변환을 통해 계산할 수 있다. $z = 0$인 면에서는 상대론에 의해 팬케이크(pancake) 모양으로 전자기장이 전하 주변에 생성되므로, 수학적으로는 디락 델타 함수가 나타날 것이다. 하지만, 우리는 급수 전개의 수렴 조건 $|z| \gg b\xi^{2/3}$을 적용하고 있으므로, 이러한 $z = 0$에서 나타나는 항들은 고려하지 않는다.

$0 < r < b, z < 0$, 그리고 $|z| \gg b\xi^{2/3}$인 경우에, 방위각 방향 성분의 전기장은 다음과 같이 주어진다.

$$E_\theta = -\sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right)\frac{c}{\sigma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3I_m}{4\pi b^{2m+1}} \frac{r^{m-1}(r^2 - b^2)}{m+1} \sin(m\theta) \frac{1}{|z|^{5/2}}. \tag{14.110}$$

그리고, 반경 방향 전기장은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} E_r &= -\sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right)\frac{c}{\sigma}} \\ &\times \left(\frac{3q}{8\pi b}\frac{r}{|z|^{5/2}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3I_m}{4\pi b^{2m+1}} \frac{r^{m-1}(r^2 + b^2)}{m+1} \cos(m\theta) \frac{1}{|z|^{5/2}}\right). \end{aligned} \tag{14.111}$$

마지막으로, 자기장의 횡단면 방향 성분은 $0 < r < b, z < 0$, 그리고 $|z| \gg b\xi^{2/3}$인 조건에서

$$cB_\theta = E_r - \sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right)\frac{c}{\sigma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2I_m m r^{m-1}\cos(m\theta)}{\pi b^{2m+1}} \frac{1}{|z|^{1/2}}, \tag{14.112}$$

그리고,

$$cB_r = -E_\theta - \sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right)\frac{c}{\sigma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2I_m m r^{m-1}\sin(m\theta)}{\pi b^{2m+1}} \frac{1}{|z|^{1/2}}, \tag{14.113}$$

로 주어진다.

지금까지 구한 저항성-벽면 웨이크 필드에 관해 몇 가지 주목할 만한 점을 소개하면 다음과 같다. 첫째, 진공챔버 내벽에서의 전자기장이 $r \to \infty$의 극한에서 0으로 수렴하도록 하기 위해, 우리는 λ의 허수부가 양수가 되도록 잡았었다. 이러한 선택은 전자기장을 만들어 내는 근원 입자 앞쪽에서는, 즉, $z > 0$에서는 웨이크 필드가 없도록 만들어 준다. 다른 말로 하면, λ의 복소 평면에서의 위상은 전자기장이 진공챔버 내벽에서 반경에 따라 감쇠한다는 조건뿐만 아니라, 인과율도 동시에 만족하도록 결정이 된다는 것이다.

둘째, 우리는 진공챔버 내벽에서의 전자기장에 대해서는 식 (14.83)–(14.88)에 소개된 근사식을 도입하였다. 이 식들은 $r = b$에서의 매칭을 통해 식 (14.66)–(14.71)의 적분 상수들을 구하는 데에만 사용이 되었다. 챔버 안쪽 진공 영역의 해인 식 (14.66)–(14.71) 자체는 적분상수의 값에 상관없이 맥스웰 방정식의 정확한 해가 된다. 또한, 우리는 파수(k) 공간에서 좌표(z) 공간으로 푸리에 변환을 하기 전에, k가 포함된 여러 계수 항들에 대해 근사를 도입하였다. 이러한 근사는 해의 좌표계에 대한 함수 형태를 바꾼다기 보다는 푸리에 계수들에 주로 적용이 되었다. 이러한 결과로 우리가 구한 최종 해인 식 (14.105)–(14.113)은 분명 맥스웰 방정식의 해이긴 하다. 하지만, 당초 우리가 가정한 다중극 모멘트 I_m을 가지는 고리 형태의 전하분포가 광속으로 원통형 진공챔버를 지나는 경우를 기술하는 정확한 해는 아닐 수도 있다.

Short range wakefields

식 (14.66)–(14.71)가 유효하기 위한 조건은 $z < 0$, 그리고 $|z| \gg b\xi^{2/3}$이다. 우리가 $z \to 0^-$의 극한을 식 (14.105)에 취하면, 전하의 움직임과 같은 방향으로 웨이크 필드가 힘을 작용한다는 결론에 이른다. 즉, 자기 자신이 내는 웨이크 필드에 의해 전하가 가속된다는 이야기인데, 이럴 경우 에너지 보존을 위배하게 된다. 이러한 모순이 발생하지 않게 하려면, $|z| \ll b\xi^{2/3}$에서 쓸 수 있는 좀 더 정확한 식이 필요하다. 식 (14.93)과 (14.95)의 푸리에 변환을 통해 이러한 근사식을 얻을 수 있다. $m = 0$이고 $z < 0$에서 다음과 같은 근사식이 Bane 등에 의해 얻어졌다 [4].

$$\begin{aligned} E_s &= -\frac{16q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\left(\frac{e^u}{3}\cos(\sqrt{3}u) - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2 e^{ux^2}}{x^6+8}dx\right), \qquad (14.114) \\ E_r = cB_\theta &= \frac{8qr}{4\pi\varepsilon_0 b^3 \xi^{2/3}} \\ &\times \left(\frac{e^u}{3}\cos(\sqrt{3}u) - \frac{e^u}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}u) - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^4 e^{ux^2}}{x^6+8}dx\right). \qquad (14.115) \end{aligned}$$

여기서

$$u = \frac{z}{b\xi^{2/3}}. \qquad (14.116)$$

위 식으로부터 빔진행 방향의 전기장에 대해서 다음을 얻는다.

$$\lim_{z\to 0^-} E_s = -\frac{q}{\pi\varepsilon_0 b^2}. \qquad (14.117)$$

여기서, $(\sqrt{2}/\pi)\int_0^\infty dx x^2/(x^6+8) = 1/12$임을 이용하였다. 다음 절에서 좀 더 자세히 다루겠지만, 광속으로 움직이는 입자가 가속기 빔파이프를 지날 때, 입자는 $z \to 0^-$에서의 웨이크 필드의 1/2만큼의 지연력(retarding force)을 느끼게 된다. 이러한 결과는 Wilson 등에 의해 알려졌으며 'fundamental theorem of beam loading'이라고 보통 부른다. 이 원리는 저항성-벽면 웨이크 필드의 경우뿐만 아니라, 일반적인 경우에도 적용이 된다. 이 원리의 결과로, 웨이크 필드를 발생하는 입자는 웨이크 필드에 에너지를 빼앗기게 된다. 저항성-벽면 웨이크 필드의 경우에는 진공챔버 내에서 전기장에 의해 유도되는 옴 전류를 통해 에너지가 소모된다. 위의 식 (14.117)을 보면, $z \to 0^-$의 극한에서, 빔 진행 방향으로의 전기장 E_s는 진공챔버 내의 전기 전도도에 무관함을 볼 수 있다. 이상적인 완전 도체의 경우($\sigma \to \infty$)에는 챔버 벽에서 에너지 소모가 없을 것이기 때문에, 이 성질은 좀 이상하게 생각될 수도 있다. 하지만, 실은 위 식에서 $\sigma \to \infty$의 극한을 생각할 수가 없다. 왜냐하면, $\sigma \to \infty$일때 $\xi \to 0$이 되고, 식 (14.114)의 변수 u가 정의가 안되기 때문이다. 다르게 말하면, 식 (14.114) 및 (14.115)는 유한한 전기 전도도에서만 유효한 근사식이다.

Wall thickness

마지막으로, 우리는 웨이크 필드에 대한 식을 유도함에 있어서, 진공챔버의 두께가 무한하다는 가정을 사용하였다. 하지만, 우리가 구한 식들은 $|z|$의 범위를 적절히 제한한다면, 유한한 두께의 진공챔버의

경우에도 적용이 가능하다. 진공챔버의 두께가 w라고 하면,

$$w \gg \delta_{\text{skin}} = \sqrt{\frac{b}{|k|}}\xi, \tag{14.118}$$

인 경우, 전자기장의 분포는 $w \to \infty$인 상황과 매우 비슷하게 될 것이다. 여기서 δ_{skin}는 (자유공간에서의 주파수 $\omega = |k|c$인) 전자기파에 대한 표피 깊이이다. δ_{skin}는 주파수(또는, 파수) 공간에서의 물리량이다. 따라서, 임피던스의 표현식에만 나타나고, 웨이크 함수에서는 나타나지 않는다 [2]. $z \sim 2\pi/k$임을 이용하면 z의 상한을 대략적으로 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$|z| \ll \frac{2\pi w^2}{b\xi^2}. \tag{14.119}$$

만약 지름 40 mm의 알루미늄 진공챔버($\xi \approx 10^{-4}$)에 대해 두께를 2 mm로 가정하면, z의 조건으로 $|z| \ll 167$ km를 얻는다. 이 상한은 충분히 긴 거리이긴 하지만, 저장링의 경우에는 저항성-벽면 웨이크 필드가 많은 바퀴를 일주한 후에도 상당한 효과를 줄 수 있다. 따라서, 대부분의 실제 상황에서 식 (14.66)–(14.71)을 적용할 수 있겠지만, 이 식들이 유효한 $|z|$의 하한과 상한을 항상 염두해 두는 것이 좋겠다. 이렇게 두꺼운 내벽을 가정하고 계산되어진 웨이크 필드 표현식은, 심지어 얇은 유전체나 반도체 코팅이 진공챔버 안쪽 표면에 적용된 경우에도 사용될 수 있다. 진공도를 향상시키거나, 전자구름 효과(electron cloud effect, 챔버 안쪽에서 방출된 전자가 양성자 또는 양전자 빔의 포텐셜에 포획되어 나타나는 현상)를 억제하기 위해 종종 이러한 코팅이 사용된다. (아주 높은 주파수를 제외하고는) 반도체 코팅의 표피 깊이는 보통 매우 큰 편이라, 전자기장은 코팅의 영향이 거의 없이 진공챔버와 상호작용을 한다. 따라서, 아주 높은 주파수(즉, 매우 짧은 $|z|$)에서는 반도체 코팅이 웨이크 필드에 영향을 미칠 수 있겠지만, 일반적으로는 그러한 코팅이 저항성-벽면 웨이크 필드에 의한 빔 불안정성에 미치는 영향은 제한적이게 된다.

초상대론적 운동을 하는 빔이 자유공간을 지나거나, 또는 완전도체 진공챔버 안을 지날 때는 웨이크 필드가 생기지 않는다. 만약 유전상수(dielectric constant)가 작은 유전체로 진공챔버를 만든다면 (코팅이 아니라), 이미지 전하가 발생되지 않으니 웨이크 필드의 생성을 줄일 수 있다는 아이디어도 제시되었다 [5].

제 3 절 웨이크 함수

지금까지의 논의된 내용을 통해, 상대적으로 단순한 경우라 하더라도, 가속기에서 웨이크 필드를 계산하는 것은 쉽지 않음을 보았다. 결과로 얻은 웨이크 필드 표현식들은 매우 복잡하였다. 어떤 상황에서는 이러한 표현식들이 사용되어질 수도 있겠으나, 대부분의 경우에는 전산 코드를 이용하여 맥스웰 방정식을 주어진 경계조건에 대해 수치적으로 풀어서 전자기장을 계산한다.

이러한 웨이크 필드가 가속기 빔동역학에 어떤 영향을 미치는 지는 다음 장에서 논의할 것이다. 어떠한 방법을 통해서건 일단 다양한 가속기 컴포넌트에 대해 웨이크 필드를 얻고 나면, 그 다음 단계는

빔에 가해지는 힘을 결정하는 일이다. 초상대론적(ultrarelativistic) 운동을 하는 빔의 경우에는, 가정을 통해 웨이크 필드에 의해 가해지는 힘을 단순화하여 계산할 수 있다. 즉, 웨이크 필드로부터 입자에 가해지는 힘을 시간 영역에서 편리하게 계산하도록 해주는 웨이크 함수(wake function)를 정의할 수 있게 된다.

다음과 같은 전하밀도 분포 ρ를 가지는 빔이 가속기 빔라인을 따라 움직인다고 가정하자.

$$\rho = \frac{I_m}{\pi(1+\delta_{m0})a^{m+1}} \cos(m\theta)\delta_{\mathrm{D}}(r-a)\delta_{\mathrm{D}}(s-ct). \tag{14.120}$$

전하는 반지름 a인 고리 모양을 이루고 다중극 모멘트 I_m을 가진다. 우리는 특정한 하나의 푸리에 성분 m을 생각한 것이다. 시간 t에서 전체 전하는 $s = ct$인 면에 놓이게 된다. 여기서 s는 기준 궤적을 따라 측정되는 거리이다. 전하분포가 진공챔버의 한 단면을 지나게 되면, 웨이크 필드를 발생시켜서, 일정한 거리 뒤에서 따라오는 전하 q의 점 입자에 힘 $\mathbf{F}$를 가하게 된다.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{14.121}$$

여기서 $\mathbf{E}$는 전기장, 그리고 $\mathbf{B}$는 자기장이다. 적절한 가정을 통해, 우리는 $\mathbf{F}$에 대한 유용한 표현식들을 얻을 수 있다. 이 표현식들에서 후행 입자에 가해지는 힘은, 선행하는 전하 분포로부터의 거리($|z|$) 만의 함수 하나를 통해 표현된다. 이 함수를 웨이크 함수라고 부르며, 앞 절에서 논의하였던 웨이크 필드와 관련이 되어있다. 우리가 필요한 적절한 가정은 선행하는 전하 분포와 후행하는 점 전하가 모두 광속으로 진행하며, 그 후행 점 전하는 기준 궤적을 따라 진행한다는 것이다.

길이가 L인 빔파이프의 특정한 하나의 구간을 가정하자. 이 구간의 중심을 기준 괘적 $s = 0$으로 놓는다. 웨이크 필드를 발생시키는 전하 분포는 시간 $t = 0$에서 이 빔파이프의 중심 $s = 0$에 위치하고, 기준 궤적과 나란하게 광속으로 진행한다고 생각한다. 우리는 다음의 변수 z를 정의한다.

$$z = s - ct. \tag{14.122}$$

따라서, 후행 입자에 대해서는 $z < 0$이다. 이는 Chao의 책과 같은 표기법인데, 종종 어떤 연구자들은 반대로 잡기도 한다. 만약, 후행 입자와 선행 전하 분포 모두 광속으로 기준 궤적을 따라 진행한다면, z는 상수가 된다. 그리고, $|z|$는 선행 전하 분포와 후행 입자간의 거리가 된다.

빔파이프 내에서의 전자기장은 일반적으로 좌표계 r, θ, 및 s, 그리고 시간 t 에 의존한다. 후행 입자와 선행 전하 분포가 모두 광속으로 움직인다는 사실을 이용하면, 후행 입자가 느끼는 전자기장을 s 및 t 두 변수가 아닌, z 하나로 표현 가능하다. 과정은 다음과 같다. 먼저 어떤 변량 f를 기준 궤적을 따라 $s = -L/2$에서 $s = L/2$까지 적분한 값을 $[f]_z$라고 놓자. 변량 f는 전자기장의 한 성분일 수도 있고, 또는 그 전자기장 성분의 미분값이 될 수도 있다. 변량 f를 일정한 z에 대해, 위치 s 및 시간 $ct = s - z$ 에서 계산하고 궤적을 따라가며 적분하면 다음과 같다.

$$[f]_z = \int_{-L/2}^{L/2} f(s, ct = s - z)\ ds. \tag{14.123}$$

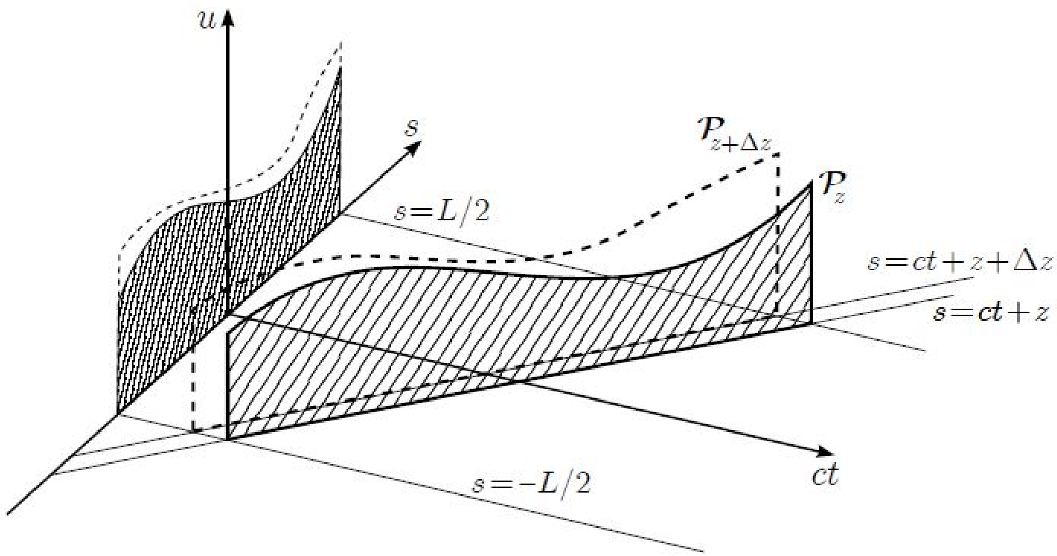

그림 14.2: 웨이크 필드에 의해 하전 입자에 가해지는 힘을 적분하기 위한 모식도. 위 그림에서 $z<0$이고, $\Delta z>0$이다. 웨이크 필드는 빔 라인의 한 부분인 $s=-L/2$에서 $s=L/2$까지의 영역에 존재한다고 가정한다. 이 그림의 좌표계에서 웨이크 필드에 의한 힘 f는 곡면 $u=f(s,ct)$을 정의한다. 힘을 느끼는 입자는 $z=s-ct$가 고정되어 있다. 따라서, 웨이크 필드에 의한 힘의 적분값은 빗금 친 평면 $\mathcal{P}_z$를 $ct=0$ 평면으로 투영시킨 영역의 면적이 된다. 직선 $s=ct+z$에 대해 s축으로의 절편은 $z<0$, ct축으로의 절편은 $-z>0$임을 볼 수 있다.

어떤 책에서는 시간 t에 대해서 적분을 하는데, 이 경우 인자 c의 차이가 있을 뿐이지, 같은 맥락을 가지는 물리량이다.

논의를 쉽게하기 위해 변량 f에 있는 r 및 θ에 대한 의존성을 잠시 무시하자. 이 경우 우리는 f를 3 차원 공간에서의 곡면으로 생각할 수 있다. ct와 s는 수평면의 두 축을 이룬다고 가정하고, 수직축은 u로 놓는다면, f가 만들어내는 곡면은 $u=f(s,ct)$로 주어질 것이다. 식 (14.123)의 적분은 ct 축과 s 축으로 이루어진 수평면에서 대각선을 따라 계산되어 진다. 이 적분값은 수직한 방향으로 세워진 평면 $\mathcal{P}_z$를 $ct=0$ 평면으로 투영시킨영역의 면적을 준다. 평면 $\mathcal{P}_z$는 $s=ct+z$인 직선 위에 놓여 있고, 상하의 경계는 $u=f$ 및 $u=0$으로 주어지고, 좌우 경계는 $s=\pm L/2$로 주어진다 (그림 14.2 참조).

한편, 물리량 $[\partial f/\partial ct]_z \Delta z$는 두 평면 $\mathcal{P}_z$와 $\mathcal{P}_{z+\Delta z}$를 $ct=0$ 평면으로 투영시킨 면적의 차이값으로 나타낼 수 있다.

$$-\frac{1}{c}\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_z \Delta z = \mathcal{P}_{z+\Delta z} - \mathcal{P}_z = \int_{-L/2}^{L/2} f(s, ct=s-(z+\Delta z)) - f(s, ct=s-z)\, ds. \qquad (14.124)$$

z에서 $z+\Delta z$로 변화할 때, ct는 감소하는 방향으로 변하므로, 이를 반영하여 좌변에 -1을 곱하였다.

위 식으로부터

$$\frac{1}{c}\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]_z = -\frac{\partial}{\partial z}[f]_z, \tag{14.125}$$

을 얻는다. 비슷한 방법으로

$$\left[\frac{\partial f}{\partial s}\right]_z \approx \frac{\partial}{\partial z}[f]_z, \tag{14.126}$$

을 얻는다. z에서 $z+\Delta z$로 변화할 때, s는 증가하는 방향으로 변하므로, 식 (14.126)에는 $(-)$ 부호가 없다. 식 (14.125)는 정확한 식이지만, 식 (14.126)은 근사적으로만 성립한다. $[\partial f/\partial s]_z\Delta z$의 계산을 위해서는 평면 $\mathcal{P}_z$를 s축에 대해 이동시켜서 $\mathcal{P}_{z+\Delta z}$를 정의하게되는데, 이 때, 두 평면의 경계가 $s=\pm L/2$에서 일치하지 않게 되어서 일반적으로 오차를 주게된다. 만약 적분 구간을 크게 하면(즉, L을 큰 값으로 하면), 이 오차는 줄어들 것이다. 특별한 경우로 함수 f가 $z=s-ct$ 에만 의존성을 갖는다면, 즉, $f(s,ct)=f(z)$인 경우에는 식 (14.126)은 정확한 식이 된다. 이것은 우리가 고려하는 시스템이 s 방향으로의 이동에 대해 불변하는 경우에 해당한다. 예를 들면, 균일한 단면적을 가지는 긴 직선형태의 빔파이프에서 저항성-벽면 웨이크 필드가 발생되는 경우이다.

이제 맥스웰 방정식을 기준 궤적을 따라 $s=-L/2$에서 $s=L/2$까지 $s-ct=z=\text{const.}$ 를 유지하면서 적분을 하자. 식 (14.125)과 (14.126)을 이용하면, 적분 안에 있는 s와 t에 대한 미분연산을 적분 밖의 z에 대한 연산으로 바꿀 수 있다. 다른 좌표계에 대한 미분연산은 적분 밖으로 빼내기만 하면 되고, 나머지 식의 형태는 변하지 않게 된다. 적분을 통해 최종 식을 유도하는 것은 단순한 계산으로서 그리 복잡하지 않다. 여기서는 하나의 예로 다음의 맥스웰 방정식에 대해서만 최종 식을 소개한다.

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{14.127}$$

이 맥스웰 방정식에 적분 연산을 적용하고, s와 t에 대한 미분연산을 적분 밖의 z에 대한 연산으로 바꾸고 나면 다음의 식들을 얻는다.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial[E_s]_z}{\partial\theta}+\frac{\partial[E_\theta]_z}{\partial z} = c\frac{\partial[B_r]_z}{\partial z}, \tag{14.128}$$

$$-\frac{\partial[E_r]_z}{\partial z}-\frac{\partial[E_s]_z}{\partial r} = c\frac{\partial[B_\theta]_z}{\partial z}, \tag{14.129}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r[E_\theta]_z)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial[E_r]_z}{\partial\theta} = c\frac{\partial[B_s]_r}{\partial z}. \tag{14.130}$$

소스항이 있는 비동차 맥스웰 방정식에 대해서는, 모든 입자들이 s축과 나란하게 광속으로 진행하고 있으므로, 전류 밀도 $\mathbf{j}$가 전하 밀도 ρ와 다음의 관계를 가진다는 것을 이용한다.

$$\mathbf{j} = (0,0,c\rho). \tag{14.131}$$

만약, 후행 입자가 s축을 따라 광속으로 움직인다면, $\mathbf{v}=(0,0,c)$ 이다. 이 후행 입자가 받는 로렌츠

힘의 각 성분을 적분하면 다음의 식들을 얻는다.

$$[F_r]_z = q([E_r]_z - c[B_\theta]_z), \tag{14.132}$$

$$[F_\theta]_z = q([E_\theta]_z + c[B_r]_z), \tag{14.133}$$

$$[F_s]_z = q[E_s]_z. \tag{14.134}$$

그 다음 단계는 s에 대해 적분된 맥스웰 방정식에서 전기장 대신 로렌츠 힘을 대입하고, $[B_r]_z$ 및 $[B_\theta]_z$을 제거하는 작업이다. 이러한 과정을 통해 다음의 결과식들을 얻는다.

$$\frac{\partial[F_r]_z}{\partial z} = \frac{\partial[F_s]_z}{\partial r} = -\frac{qc}{r}\frac{\partial[B_s]_z}{\partial\theta}, \tag{14.135}$$

$$\frac{\partial[F_\theta]_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial[F_s]_z}{\partial\theta} = qc\frac{\partial[B_s]_z}{\partial r}, \tag{14.136}$$

$$\frac{\partial(r[F_r]_z)}{\partial r} = -\frac{\partial[F_\theta]_z}{\partial\theta}, \tag{14.137}$$

$$\frac{\partial(r[F_\theta]_z)}{\partial r} = \frac{\partial[F_r]_z}{\partial\theta}. \tag{14.138}$$

치환을 통해서, 위의 미분방정식이 다음과 같은 형태의 해를 가짐을 쉽게 보일 수 있다.

$$[F_r]_z = -qI_mW_m(z)mr^{m-1}\cos(m\theta), \tag{14.139}$$

$$[F_\theta]_z = qI_mW_m(z)mr^{m-1}\sin(m\theta), \tag{14.140}$$

$$[F_s]_z = -qI_mW_m'(z)r^m\cos(m\theta), \tag{14.141}$$

$$[B_s]_z = \frac{I_m}{c}W_m'(z)r^m\sin(m\theta). \tag{14.142}$$

이 해는 특정한 하나의 푸리에 성분 m을 생각한 것이다. 여기서, $'$ 기호는 $W_m(z)$를 z에 대해 미분함을 의미한다. 함수 $W_m(z)$는 웨이크 함수(wake function)라고 부르며, 맥스웰 방정식을 주어진 경계조건과 웨이크 필드를 생성시키는 (다중극 모멘트 I_m의) 전하 분포에 대해 풀어서, 그 구체적 표현식을 구해야 한다. 예를 들어, 저항성-벽면 웨이크 필드의 경우에는, 빔진행 방향 전기장 성분이 식 (14.105)로 주어지는데, 이에 해당하는 웨이크 함수는 길이 L의 빔파이프 영역에서 다음과 같다.

$$W_m(z) = -\sqrt{\left(\frac{Z_0c}{4\pi}\right)\frac{c}{\sigma}}\frac{2L}{(1+\delta_{m0})\pi b^{2m+1}}\frac{1}{|z|^{1/2}}. \tag{14.143}$$

이 식은 $z < 0$이고 $|z| \gg b\xi^{2/3}$인 경우에 유효하며, 식 (14.141)의 양변을 비교하여 얻어졌다. $W_m(z)$의 함수 꼴을 구했으므로, 식 (14.139) 및 (14.140)을 이용하면, 적분된 힘의 횡단면 방향 성분들을 얻을 수가 있다. 또한, 식 (14.142)를 이용하면, 적분된 빔진행 방향 자기장 성분을 구할 수 있다. 이렇게 $W_m(z)$를 이용하여 구한 적분 값들은, 식 (14.106) 및 (14.110)–(14.113)을 직접 적분식에 대입하여 계산한 결과와도 일치하게 된다.

공동 공진기의 경우에는 $m = 0$ 웨이크 함수를 식 (14.41)과 (14.141)을 비교하여 쉽게 얻을 수 있다. 결국, 식 (14.141)을 z에 대해 적분하면 되는데, 그 결과는 $z < 0$에 대해 다음과 같다.

$$W_0(z) = \frac{Z_0 c}{4\pi}\frac{3L^2}{R^2}\frac{\omega_r}{\bar{\omega}_r}\varepsilon^{\alpha z/c}\sin\left(\frac{\bar{\omega}_r z}{c}\right). \tag{14.144}$$

여기서, R은 공동 공진기의 반지름, $L \ll R$은 공동 공진기의 길이, ω_r은 기본 공진 모드의 주파수, $\alpha = \omega_r/2Q$는 기본 모드의 감쇠를 기술한다. Q는 기본 모드의 픔질인자이며,

$$\bar{\omega}_r = \sqrt{|\omega_r^2 - \alpha^2|}, \tag{14.145}$$

이다. 우리가 제 1 절에서 논의했듯이, 이러한 결과들은 점전하에 의해 공동 공진기에서 유도되는 전기장에 대한 간략화된 모형을 적용하여 얻어진 것이다. 그렇지만, z에 대한 의존성 (즉, 전자기장이 공동 공진기의 품질인자 및 공진 주파수에 의존하여 감쇠 진동하는 경향성) 등은 실제 공진기 웨이크 필드를 해석하는데 있어서 편리하며 종종 사용되는 모형이다.

식 (14.139)–(14.142)는 빔파이프 내부에서 축대칭 경계조건을 가지는 경우에 대해서만 유효하다. 축대칭이 아닌 구조의 경우에는 좀더 복잡한 식들이 적분된 전자기장을 표현하는데 시용되어야 한다. 한가지 명심해야 할 것은 식 (14.139)–(14.142)를 얻는 데에, 웨이크 필드를 만들어 내는 선행 입자와 웨이크 필드를 관찰하는 후행 입자가 모두 진공챔버를 따라 광속으로 진행한다는 가정이 사용되었다는 점이다. 따라서, 식 (14.139)–(14.142)는 상대론 계수 $\gamma_0 \gg 1$인 고에너지 빔에 대해서만 유효하다.

앞에서 소개한 물리량 $[\mathbf{F}]_z$는 힘을 길이에 대한 적분한 값이므로 에너지의 단위를 가진다. 일반적으로 이 물리량을 웨이크 포텐셜(wake potential)이라고 부르기도 한다. SI 단위계에서 웨이크 함수 $W_m(z)$는 $\mathrm{V\ C^{-1}\ m^{(1-2m)}}$(또는, 등가적으로 $\Omega\ \mathrm{s^{-1}\ m^{(1-2m)}}$)의 단위를 가진다. 특별히, $W_1(z)$는 횡단면 방향으로의 효과에서 지배적인데, 단위는 $\mathrm{V\ C^{-1}\ m^{-1}}$(또는, 등가적으로 $\Omega\ \mathrm{s^{-1}\ m^{-1}}$)이다. 또한, $W_0'(z)$는 빔진행 방향으로의 효과에서 지배적이고, 단위는 $\mathrm{V\ C^{-1}}$(또는, 등가적으로 $\Omega\ \mathrm{s^{-1}}$)이다.

Panofsky-Wenzel theorem

식 (14.139)–(14.141)으로부터, 웨이크 함수의 매우 흥미롭고 유용한 성질들을 발견할 수 있다. 먼저, 횡단면 방향 웨이크 포텐셜과 빔진행 방향 웨이크 포텐셜은 서로 직접적으로 연관이 되어있다는 것을 관찰할 수 있다. 만일 다음과 같이 성분별로 쓴다면,

$$[\mathbf{F}_\perp]_z = [F_r]_z\hat{r} + [F_\theta]_z\hat{\theta}. \tag{14.146}$$

여기서, $\hat{r}$ 및 $\hat{\theta}$는 각각 반경 방향 및 방위각 방향으로의 단위벡터이다. 이제 식 (14.139)–(14.141)으로부터, 다음과 같은 관계식이 성립함을 확인할 수 있다.

$$\nabla_\perp[F_s]_z = \frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{F}_\perp]_z. \tag{14.147}$$

여기서, $\nabla_\perp$는 Gradient 연산자의 수직 성분이다. 식 (14.147)은 'Panofsky-Wenzel theorem'으로 알려져 있다.

General properties of wake functions

여러가지 웨이크 함수의 흥미로운 성질들이 다양한 물리적인 구속 조건으로부터 얻어진다. 첫째, 인과율에 의해,

$$W_m(z) = 0 \quad \text{if} \quad z > 0. \tag{14.148}$$

둘째, 만약 두 입자가 매우 짧은 거리 $|z|$를 두고 진행하면, 뒤에 오는 입자는 앞선 입자가 내는 웨이크 필드에 의해 감속되어야 한다. 그렇지 않다면, 웨이크 필드를 내는 입자가 스스로의 전기장에 의해 계속 에너지를 얻는 모순이 발생 될 수 있다. 즉,

$$W_m'(z) > 0 \quad \text{as} \quad z \to 0^-. \tag{14.149}$$

빔진행 방향 웨이크 포텐셜은 $z \to 0^-$인 극한에서 0이 아닐 수 있지만, 횡단면 방향으로의 웨이크 포텐셜은 z가 작은 경우 반드시 0으로 수렴해야 한다. $z \to 0^-$ 극한에서의 빔진행 방향 웨이크 포텐셜은 입자가 웨이크 필드에 잃는 에너지와 관련이 되어있다. 하지만, 축대칭 빔파이프 안을 진행하는 입자는 자기 자신이 내는 웨이크 필드에 의해 횡단면 방향으로의 편향을 경험하지는 않을 것이다. 따라서,

$$W_m(z) \to 0 \quad \text{as} \quad z \to 0^-. \tag{14.150}$$

$W_m'(z)$의 값은 (음수인) 작은 z 값에 대해 양수이므로 (즉, $W_m(z)$의 기울기가 양수), $W_m(z)$는 $z < 0$인 영역에서 양의 gradient를 가지고, $z = 0$인 지점으로 접근한다. 따라서, $z < 0$인 영역에서 $W_m(z)$는 z에 대한 sine 함수와 유사한 형태를 가지고, $W_m'(z)$는 cosine 함수와 유사한 형태를 가진다.

Fundamental theorem of beam loading

이제, 공동 공진기에서 다음과 같이 $z < 0$에서 웨이크 포텐셜이 주어진다고 가정하자.

$$[F_z]_z = F_0 \cos(kz). \tag{14.151}$$

여기서, F_0와 k는 적당한 상수이다. 이러한 가정은 식 (14.41)에 소개된 단순화된 모형에 바탕을 두었고, 다만 공동에서의 에너지 손실은 무시한 것이다. 어떤 입자가 자신이 내는 웨이크 필드를 $z \to 0^-$인 극한에서 η 만큼의 비율로 느낀다고 생각해 보자. 이때 이 입자가 공동을 지나면서 받는 에너지 변화는

$$\Delta\mathcal{E}_1 = \eta[F_s]_{z\to 0^-} = \eta F_0, \tag{14.152}$$

이다. 이제, 두번째 입자가 첫번째 입자에서 $z = \pi/k$ 만큼 뒤떨어져서 공동을 지난다고 가정하자. 이 두번째 입자도 첫번째 입자와 같은 비율로 자신이 내는 웨이크 필드를 느낄 것이다. 하지만, 두번째 입자는 첫번째 입자가 낸 웨이크 필드도 동시에 느끼기 때문에,

$$\Delta\mathcal{E}_2 = \eta[F_s]_{z\to 0^-} - F_0 = (\eta - 1)F_0. \tag{14.153}$$

공동 안에서의 전기장은 첫번째 입자와 두번째 입자 사이에서 위상이 π 만큼 변하기 때문에, 두번째 입자에 의한 웨이크 필드는 첫번째 입자의 웨이크 필드를 정확히 상쇄시킨다. 따라서, 두번째 입자마저 공동을 지나고 난 후에는 아무런 전자기장 에너지도 남아있지 않게 된다. 에너지 보존에 의해, 두 입자가 가지는 총 에너지의 변화는 0이 된다. 따라서,

$$\Delta\mathcal{E}_1 + \Delta\mathcal{E}_2 = (2\eta - 1)F_0 = 0, \tag{14.154}$$

이고, 다음과 같은 결론에 이른다.

$$\eta = \frac{1}{2}. \tag{14.155}$$

다른 말로 하면, 한 입자는 자기 자신에 내는 웨이크 필드의 절반만을 느낄 수 있다는 뜻이 된다. 이러한 성질은 'fundamental theorem of beam loading'으로 알려져 있다.

Longitudinal and transverse wake functions

마지막으로, 빔파이프 중심축에서 반경 a 만큼 떨어져서 축과 나란히 진행하는 점 입자가 저항성-벽면 웨이크 필드를 만들어 내는 상황을 고려하자. 이 경우 식 (14.139)–(14.141), (14.143) 및 (14.47)로 부터, 빔진행 방향 웨이크 포텐셜은 m에 대해 $a^m r^m / b^{2m+1}$의 의존성이 있고, 횡단면 방향 웨이크 포텐셜은 $m a^m r^{m-1} / b^{2m+1}$의 의존성이 있음을 볼 수 있다. 여기서, b는 빔파이프 반지름, r은 빔파이프 중심축으로부터 웨이크 필드가 관찰되는 지점까지의 반경 방향 거리이다. 이러한 의존성이 암시하는 것은, 만약 $a \ll b$이고 $r \ll b$인 경우라면, 빔진행 방향 웨이크 필드는 $m = 0$인 모드로 부터 지배적인 영향을 받고, 횡단면 방향 웨이크 필드는 $m = 1$인 모드로 부터 지배적인 영향을 받게 된다는 것이다. 이러한 경향성은 (모든 경우에 해당하는 것은 아니지만) 빔파이프와 비슷한 크기의 구조물에 의해 발생되는 기하학적 웨이크 필드의 경우를 포함해서 매우 흔하게 나타난다. 만약 이러한 지배적인 웨이크 함수들만 고려하면, 빔동역학 해석이 매우 단순화될 수 있다. 이러한 맥락에서 다음과 같이 빔진행 방향 웨이크 함수 $W_\parallel(z)$(SI 단위계에서 Ω s^{-1}, 또는 V C^{-1})를 정의할 수 있다.

$$W_\parallel(z) = W_0'(z). \tag{14.156}$$

또한, 횡단면 방향 웨이크 함수 $W_\perp(z)$(SI 단위계에서 Ω s^{-1} m^{-1}, 또는 V C^{-1} m^{-1})는 다음과 같이 정의된다.

$$W_\perp(z) = W_1(z). \tag{14.157}$$

제 4 절 임피던스

우리는 지난 절에서 가속기 빔라인의 한 구역에서의 웨이크 필드는 웨이크 함수를 통해 표현될 수 있음을 보았다. 웨이크 함수는 (특정 구역에서) 어떤 입자가 디락 델타 함수 형태의 빔으로부터 일정

거리($|z|$)를 두고 따라가면서 느끼는 힘의 적분값을 주게 된다. 웨이크 함수는 변수 $z = s - ct$를 통해 표현된다. 여기서, 디락 델타 함수 형태의 빔은 시간 t일 때 기준 궤적을 따라 위치 s에 놓여있게 된다. 즉, 웨이크 함수는 시간 영역에서 웨이크 필드를 기술하게 된다. 다음 장에서 자세히 알아볼텐데, 웨이크 필드가 가속기에서의 빔안정성에 미치는 영향을 이해하기 위해서는 종종 웨이크 필드를 주파수 영역에서 기술하는 것이 유용하다. 웨이크 필드를 주파수 영역으로 변환하면 어떤 함수(즉, 임피던스)를 생성하는데, 이 함수는 어떤 특정 주파수의 전류 변조를 가지는 빔이 만들어 내는 웨이크 필드의 세기를 나타낸다. 웨이크 필드는 전류 변조의 전개에 영향을 미친다. 전류 변조를 기술하는 운동방정식을 풀게 되면, 이러한 전류 변조가 시간에 따라 감쇠할지 또는 증폭할지를 결정할 수 있다. 시간에 따라 증폭하는 전류 변조는 대부분 빔불안정성으로 이어질 가능성이 높다.

이번 장의 마지막 절에서는 가속기 빔라인의 한 구역에서의 임피던스를 웨이크 필드로부터 정의할 것이고, 임피던스의 몇 가지 예를 살펴볼 것이다. 먼저, 가속기 한 구역의 입구에서 빔진행 방향 웨이크 함수 $W_{\|}(z)$를 가지는 빔전류 $I = I(t)$를 고려하자. 여기서, I는 전류의 단위(ampere)를 가지고, 전하 분포의 다중극 모멘트 I_m과 혼동하지 말아야 한다. $m = 0$인 다중극 모멘트 I_0는 주어진 전하 분포의 전체 전하에 해당하고, 전하량의 단위(coulomb)를 가진다. 따라서, 시간 t와 $t + dt$사이 동안 가속기 특정 구역의 입구를 지나는 전체 전하는 $I_0 = I(t)dt$가 된다. 이제 식 (14.141)로 부터($m = 0$ 고려), 시간 t'에서 빔라인 특정 구역을 지나갈 때의 포텐셜은

$$V(t') = \frac{[F_s]_z(t')}{q} = -\int_0^{\infty} dt\ I(t'-t)W_{\|}(-ct). \tag{14.158}$$

여기서, 포텐셜 $V(t')$는 어떤 후행 하전입자 q가 가속기 특정 영역을 지날 때 (시간 t'에서 그 영역 입구에 들어온다고 가정), 단위 전하량당의 에너지 변화로 정의된다. q는 후행 입자의 성질, I는 선행 입자의 성질로 이해하면 되겠다. 새로운 변수 $z = -ct$를 정의하면, 포텐셜은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$V(t') = -\int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{c} I(t' + z/c)W_{\|}(z). \tag{14.159}$$

웨이크 함수는 가속기 빔파이프의 특정 영역에서의 웨이크 포텐셜을 시간의 함수로 계산해 주는 그린(Green) 함수의 역할을 한다. 양수의 전압 V는 전하 q의 입자가 빔파이프의 특정 영역을 지나면서 에너지 qV를 얻는다는 것을 의미한다. 이제, 전류를 주파수 스펙트럼의 적분으로 표현하자.

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{I}(\omega). \tag{14.160}$$

그러면, 위의 전압은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} V(t') &= -\int_{-\infty}^{0} \frac{dz}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t'} \tilde{I}(\omega) e^{-i\omega z/c} W_{\|}(z), \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t'} \tilde{I}(\omega) Z_{\|}(\omega). \end{aligned} \tag{14.161}$$

여기서, 우리는 빔진행 방향 임피던스 $Z_{\parallel}(\omega)$를 다음과 같이 정의하였다.

$$Z_{\parallel}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} e^{-i\omega z/c} W_{\parallel}(z). \tag{14.162}$$

인과율에 의해 $z > 0$인 구간에서 $W_{\parallel}(z) = 0$이므로, z에 대한 적분의 상한을 0에서 무한대로 바꾸었다. 이제, 식 (14.161)의 양변에 $e^{i\omega' t'}$를 곱하고, t'에 대해 적분을 하면

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\omega') &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega' t'} V(t), \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\omega'-\omega)t'} \tilde{I}(\omega) Z_{\parallel}(\omega), \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta_D(\omega - \omega') \tilde{I}(\omega) Z_{\parallel}(\omega). \end{aligned} \tag{14.163}$$

따라서, (ω'을 ω로 바꾼 후) 다음과 같은 최종 관계식을 얻는다.

$$\tilde{V}(\omega) = -\tilde{I}(\omega) Z_{\parallel}(\omega). \tag{14.164}$$

즉, 전류 스펙트럼에 (웨이크 함수의 푸리에 변환으로 정의된) 임피던스를 곱하면 전압 스펙트럼을 얻는다. 이것은 우리가 AC 회로 이론으로부터 정확히 예상할 수 있는 성질이다. 부호 ($-$)가 붙어 있는 것이 조금 다른데, 이것은 우리가 전압을 빔파이프의 특정 영역을 지날 때 단위 전하량당의 에너지 '이득'으로 정의했기 때문이다 (회로에서는 에너지 강하로 전압이 정의된다).

식 (14.164)는 임피던스의 중요성을 명확히 보여준다. 빔라인의 특정 영역에서 발생되는 웨이크 필드가 가속기 성능에 실질적인 영향을 미치려면, 임피던스와 빔전류 스펙트럼이 (주파수 영역에서) 중첩이 있어야 한다. 어떤 주파수 대역에서 임피던스가 아주 크다고 하더라도, 전류 스펙트럼도 같은 주파수 대역에서 큰 성분이 있지 않다면, 그 임피던스와 연관된 웨이크 필드는 빔에 큰 영향을 미치지 못하게 된다.

식 (14.162)에서 우리는 빔진행 방향 임피던스를 빔진행 방향 웨이크 함수 $W_{\parallel}(z) \equiv W_0'(z)$의 푸리에 변환으로 정의하였다. 이러한 정의는 고차 빔모멘트 I_m과 연관된 빔진행 방향 웨이크 함수 W_m'으로 일반화시킬 수 있겠다.

$$Z_m^{\parallel}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} e^{-i\omega z/c} W_m'(z). \tag{14.165}$$

웨이크 필드의 빔진행 방향 효과에서는 보통 $m = 0$인 홀극 빔모멘트가 지배적이 된다. 따라서, 편의상 다음과 같이 정의한다.

$$Z_{\parallel}(\omega) = Z_0^{\parallel}(\omega). \tag{14.166}$$

비슷한 방식으로 횡단면 방향 임피던스는 횡단면 방향 웨이크 함수 W_m의 푸리에 변환으로 정의할 수 있다. 횡단면 방향 임피던스는 특정한 다중극 모멘트를 가지는 빔에 의해 생성되어 특정한 주파수로 변조하며 입자에 작용하는 횡단면 방향 힘을 기술한다. 일반적으로 쓰이는 표기법을 따라, $i \equiv \sqrt{-1}$을

포함하여 아래와 같이 정의한다.

$$Z_m^{\perp}(\omega) = i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{c}e^{-i\omega z/c}W_m(z). \tag{14.167}$$

웨이크 필드의 횡단면 방향 효과는 보통 $m = 1$인 쌍극 빔모멘트가 지배적이 된다. 따라서, 편의상 다음과 같이 정의한다.

$$Z_{\perp}(\omega) = Z_1^{\perp}(\omega). \tag{14.168}$$

웨이크 함수 $W'_m(z)$와 $W_m(z)$는 물론 임피던스의 푸리에 역변환으로 주어진다.

$$\begin{aligned} W'_m(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\ e^{i\omega z/c}Z_m^{\parallel}(\omega), & (14.169)\\ W_m(z) &= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\ e^{i\omega z/c}Z_m^{\perp}(\omega). & (14.170)\end{aligned}$$

횡단면 방향 웨이크 함수와 빔진행 방향 웨이크 함수는 식 (14.147)에 소개된 Panofsky-Wenzel theorem에 의해 서로 연관되어 있다. 이에 대응되는 횡단면 방향 임피던스와 빔진행 방향 임피던스 사이의 관계식은 식 (14.165)를 부분적분하여 다음과 같이 얻는다.

$$Z_m^{\parallel}(\omega) = \frac{\omega}{c}Z_m^{\perp}(\omega). \tag{14.171}$$

앞 절에서 우리는 저항성-벽면 웨이크 필드의 웨이크 함수, 그리고 공동 공진기에서 발생되는 웨이크 필드의 웨이크 함수를 각각 구한 바가 있다. 이에 해당하는 임피던스는 푸리에 변환을 통해 얻어질 수 있음도 보았다. 하지만, 저항성-벽면 웨이크 필드의 경우, 임피던스는 우리가 앞 절에서 구한 웨이크 필드의 표현식에서 좀더 직접적으로 구할 수 있다. 이렇게 할 수 있는 이유는, 우리가 웨이크 필드를 구하기 위해 애초에 주파수 영역에서 먼저 계산을 했고, 그 후에 푸리에 변환을 통해 웨이크 필드를 시간 영역에서 구했기 때문이다. 가속기 빔파이프 축상으로 다중극 모멘트 I_m을 가진 디락 델타 분포의 빔이 광속으로 진행한다고 가정하자. 그리고, 전하 q의 입자가 역시 광속으로 이 빔분포를 따라간다고 생각하자. 만약, E_s가 전하 q가 느끼는 빔진행 방향 전기장이고, W_m은 이에 해당하는 길이 L의 빔파이프 영역에 걸친 웨이크 함수라고 한다면, 식 (14.53), (14.68), (14.141) 및 (14.165)에 의해

$$\begin{aligned} E_s &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikz}\cos(m\theta)\bar{C}_m^{(2)}\left(\frac{r}{b}\right)^m,\\ &= -\frac{I_m}{L}W'_m(z)r^m\cos(m\theta),\\ &= -\frac{I_m}{L}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}e^{i\omega z/c}Z_m^{\parallel}(\omega)r^m\cos(m\theta), & (14.172)\end{aligned}$$

로 쓸 수 있다. 여기서, $\bar{C}_m^{(2)}$은 식 (14.93) 및 (14.95)에 의해 주어진다. 따라서,

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikz}dk\frac{\bar{C}_m^{(2)}}{cb^m} = -\frac{I_m}{L}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega z/c}\frac{d\omega}{c}Z_m^{\parallel}(\omega). \tag{14.173}$$

만약 $k = \omega/c$로 놓으면,

$$Z_m^{\parallel}(\omega) = -\frac{L\bar{C}_m^{(2)}}{cI_m b^m}. \tag{14.174}$$

식 (14.93) 및 (14.95)의 $\bar{C}_m^{(2)}$에 대한 표현식을 이용하면 (λ는 식 (14.90)을 이용) 임피던스는 다음과 같이 명시적으로 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} Z_m^{\parallel}(\omega) &= \left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right)\frac{4L}{b^{2m}} \\ &\times \left((1+\delta_{m0})(1+i\ \mathrm{sgn}(\omega))bc\sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right)\frac{2\pi\sigma}{|\omega|}} - \frac{ib^2\omega}{m+1} + \frac{ic^2 m}{\omega}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{14.175}$$

식 (14.93) 및 (14.95)의 $\bar{C}_m^{(2)}$ 표현식 분모에 있던, $2k/\lambda$ 항은 임피던스에 큰 기여를 안하기 때문에 생략하였다.

식 (14.175)의 빔진행 방향 임피던스에 대한 표현식은 높은 주파수, 즉 짧은 거리 z에 대해서도 유효하다. 우리가 시간 영역에서 문제를 다루었을 때에는, $|z| \gg b\xi^{2/3}$(ξ는 식 (14.96)으로 주어짐)이라는 조건을 적용하여, 저항성-벽면 웨이크 필드에 대한 근사식 (14.143)을 얻었었다. 저주파 근사(큰 $|z|$ 값에 해당)를 임피던스에 적용하면 좀 더 간략화된 식을 얻을 수 있다. $|\omega| \ll \xi^{-2/3}c/b$인 주파수 영역에서 식 (14.175)는 다음과 같이 근사된다.

$$Z_m^{\parallel}(\omega) \approx \frac{(1 - i\ \mathrm{sgn}(\omega))}{(1+\delta_{m0})}\frac{L}{b^{2m+1}c}\sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right)\frac{2|\omega|}{\pi\sigma}}. \tag{14.176}$$

이에 해당하는 횡단면 방향의 임피던스는 식 (14.171)을 이용하면 바로 구할 수 있다. 이제, 모드 $m = 0$과 $m = 1$이 빔진행 방향 및 횡단면 방향에서 각각 지배적이라 가정하면, 길이 L, 반경 b 및 전기 전도도 σ인 빔파이프에서의 저항성-벽면 임피던스는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Z_{\parallel}(\omega) \equiv Z_0^{\parallel}(\omega) \approx (1 - i\ \mathrm{sgn}(\omega))\frac{L}{2bc}\sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right)\frac{2|\omega|}{\pi\sigma}}, \tag{14.177}$$

$$Z_{\perp}(\omega) \equiv Z_1^{\perp}(\omega) \approx (1 - i\ \mathrm{sgn}(\omega))\frac{c}{\omega}\frac{L}{b^3 c}\sqrt{\left(\frac{Z_0 c}{4\pi}\right)\frac{2|\omega|}{\pi\sigma}}. \tag{14.178}$$

이 식들은 $|\omega| \ll \xi^{-2/3}c/b$인 영역에서, 그리고 표피 깊이가 빔파이프 두께보다 매우 얇은 경우에 적용이 된다. 그리고, 두 식의 주파수 ω에 대한 의존성과 빔파이프 반경 b에 대한 의존성이 서로 다름에 유의해야 한다.

저항성-벽면 웨이크 필드의 경우에 우리는 빔진행 방향 및 횡단면 방향 웨이크 임피던스가 다음과 같이 연관되어 있음을 볼 수 있다.

$$Z_{\perp} = \frac{2c}{\omega b^2}Z_{\parallel} = \frac{C_0}{\pi b^2}\frac{Z_{\parallel}}{n}. \tag{14.179}$$

여기서, $n = \omega C_0/2\pi c$는 원형가속기의 둘레(C_0)를 주파수 ω인 전자기파의 파장으로 나눈 값이다. 15장에서 다룰 텐데, 물리량 $Z_{\parallel}/n$은 저장링에서의 임피던스 특성을 기술하는 데 (다소 엄밀하지는 않지만) 편리하며, 특히 빔불안정성의 임계값을 예측하는 목적으로 쓰인다. 횡단면 방향 임피던스 $Z_{\perp}$와

빔진행 방향 임피던스 $Z_{\|}$는 빔 분포의 서로 다른 모멘트(즉, 다른 m 값)에 반응하는 웨이크 필드의 특성을 기술한다. 원칙적으로는, 횡단면 방향 임피던스 $Z_{\perp}$와 빔진행 방향 임피던스 $Z_{\|}$ 사이에 어떤 특정한 관계가 있다고 단정할 근거는 없다. 하지만, 관계식 (14.179)는 종종 저항성-벽면 이외의 다른 원인에 의해 발생되는 임피던스에도 일반화되어 쓰인다.

이제 공동 공진기에서의 임피던스를 살펴보자. 앞에서 소개한 원통형 공동에서의 단순화된 모형에 의해, $m = 0$인 모드의 웨이크 함수는 식 (14.144)로 부터 다음과 같이 ($z < 0$에 대해) 쓸 수 있다.

$$W_0(z) = \frac{cR_s}{Q} e^{\alpha z/c} \sin\left(\frac{\bar{\omega}_r z}{c}\right). \tag{14.180}$$

여기서, ω_r은 공명 주파수, Q는 품질 인자, $\alpha = \omega_r/2Q$, 그리고 $\bar{\omega}_r = \sqrt{|\omega_r^2 - \alpha^2|}$이다. 또한, R_s는 상수로서 (SI 단위계에서 ohms), 웨이크 함수의 크기를 특성짓는다. 구간 $z > 0$에 대해서는 웨이크 함수가 0이다. $W_0'(z)$를 푸리에 변환하면 다음과 같이 빔진행 방향 임피던스를 얻는다.

$$Z_0^{\|}(\omega) \approx \frac{R_s}{1 + iQ\left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r}\right)}. \tag{14.181}$$

위의 근사는 $2Q \gg 1$에서 유효하다. 비록 우리는 공동 공진기의 $m = 0$인 모드에 국한하여 논의를 했지만, 식 (14.181)은 다른 모드들에 대해서도 종종 일반화시켜서 사용된다.

$$Z_m^{\|}(\omega) \approx \frac{R_{s,m}^{\|}}{1 + iQ\left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r}\right)}. \tag{14.182}$$

이에 해당되는 횡단면 방향 임피던스는 다음과 같다.

$$Z_m^{\perp}(\omega) \approx \frac{c}{\omega} \frac{R_{s,m}^{\perp}}{1 + iQ\left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r}\right)}. \tag{14.183}$$

공진기 임피던스 (14.181) 및 (14.183)을 주파수의 함수로 그려보면, 그림 14.3과 같다.

식 (14.181)의 임피던스는 저항 R_s, 인덕턴스 L (여기서는 길이가 아님), 커패시턴스 C가 병렬로 연결된 LCR 회로에서 얻어지는 임피던스와 같은 형태이다.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R_s} + \frac{i}{\omega L} - i\omega C = \frac{1 + iQ\left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r}\right)}{R_s}. \tag{14.184}$$

어떤 LCR 회로에서의 공진 주파수는

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{14.185}$$

이고, 품질 인자는

$$Q = R_s\sqrt{\frac{C}{L}}, \tag{14.186}$$

이다. LCR 회로에서, $|\omega| \ll \omega_r$인 경우 임피던스는 인덕턴스가 지배적이 되고, 반면 $|\omega| \gg \omega_r$인 경우 커패시턴스가 지배적이 된다. 만약, $\omega \approx \omega_r$인 경우, 임피던스는 저항 $Z \approx R_s$에 의해 결정된다. 가속기에서는 임피던스 허수부의 부호가 (ω는 양수로 가정) 음수냐 또는 양수냐에 따라, 각각 '유도성

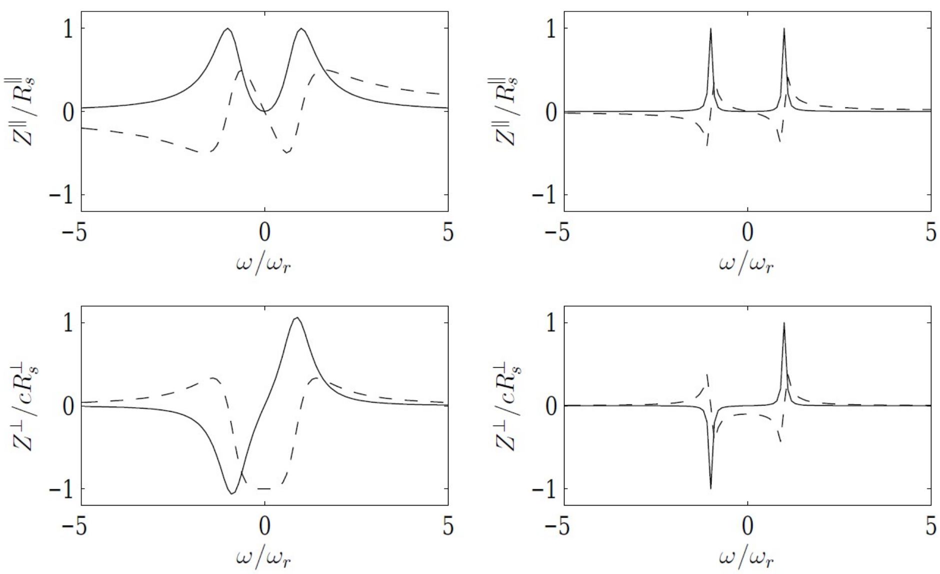

그림 14.3: 공동 공진기에서 빔진행 방향(위) 및 횡단면 방향(아래)으로의 임피던스. 왼쪽 그림들은 $Q = 1$인 경우에 해당하고, 오른쪽 그림들은 $Q = 10$에 해당한다. 실선은 임피던스의 실수부를, 파선은 허수부를 각각 나타낸다.

(inductive)' 또는 '용량성(capacitive)'으로 부른다. 공동 공진기의 경우에, $\omega \ll \omega_r$일 때, 임피던스는 유도성이고, $\omega \gg \omega_r$일 때 용량성이 된다. 저항성-벽면 임피던스의 경우(빔진행 방향 성분은 식 (14.177), 횡단면 방향 성분은 식 (14.178)), 부분적으로 저항성이고 부분적으로 유도성이다.

Space charge impedance

12장 6절에서는 저장링에서의 빔진행 방향 공간전하 임피던스를 다음과 같이 정의한 바 있다.

$$Z_{\parallel \mathrm{sc}}(\omega) = i\frac{gZ_0}{2\beta\gamma^2}\frac{\omega}{\omega_0}. \tag{14.187}$$

여기서, $g = 1 + 2\ln(b/a)$, b는 빔파이프 반경, a는 (KV 분포로 가정된) 빔의 반경, 그리고 ω_0는 저장링을 도는 회전 주파수이다. 엄밀히 말하면, 공간전하에 의한 힘은 빔과 진공챔버 사이의 상호작용에 의해 생성된 웨이크 필드에 의한 힘과 같은 방식으로 기술할 수는 없다. 하지만, 식 (14.187)의 공간전하 임피던스는 웨이크 함수에서 유도된 임피던스와 같은 물리적 중요성을 가진다. 즉, 빔전류의 주파수 스펙트럼과 결합하여 빔 내부 입자의 에너지 변화 스펙트럼을 준다는 면에서 유사한 면이 있다. 이러한 성질은 임피던스를 이용하여 빔불안정성을 논할 때 편리하다. 공간전하 임피던스는 양의 순허수로 주어진다. 따라서, 공간전하 임피던스는 비록 주파수에 따라 임피던스의 절대값이 증가하는 경향을 보이지만 (이러한 성질은 전기회로에서는 인덕턴스에 해당), 용량성이라고 부를 수 있다. 일반적으로 빔번치의 머리 부분의 입자들은 에너지를 웨이크 필드에 잃게된다. 반면에, 빔번처 꼬리 부분의 입자들

은 번치 길이에 따라 에너지를 얻을 수도 잃을 수도 있다. 이러한 성질은 공간전하 효과에서는 적용되지 않는다. 공간전하 효과에서는 머리 부분의 입자들은 에너지를 얻고, 꼬리 부분의 입자들은 에너지를 잃는다. 이러한 성질은 Coulomb 반발력의 자연스러운 결과라 하겠다.

General properties of impedance

14 장 3 절에서는 물리적인 구속조건으로부터 도출된 웨이크 함수의 일반적인 성질 몇가지를 살펴보았다. 마찬가지 방법으로, 물리적 (또는 수학적) 성질을 고려하여, 임피던스의 일반적인 성질들도 유도를 할 수 있다. 여기서는 두가지 예를 살펴보기로 한다. 첫째, 웨이크 함수는 실수이기 때문에, 식 (14.169) 및 (14.170)로 부터

$$Z_m^{\parallel}(\omega)^* = Z_m^{\parallel}(-\omega), \tag{14.188}$$

$$Z_m^{\perp}(\omega)^* = -Z_m^{\perp}(-\omega). \tag{14.189}$$

여기서, $Z_m^{\parallel}(\omega)^*$는 $Z_m^{\parallel}(\omega)$의 공액복소수이다.

두번째 임피던스의 일반적인 성질은 에너지 보존으로부터 나온다. 어떤 빔번치가 전하 분포 $\rho(z)$를 가진다고 가정하자. 여기서, $z = s - ct$이다. 빔번치가 빔진행 방향 웨이크 함수 $W_{\parallel}(z) = W_0'(z)$를 가지는 빔파이프의 한 구역을 지나면서 겪게되는 에너지 변화는

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= -\int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{z'}^{\infty} dz\ \rho(z')\rho(z)W_{\parallel}(z'-z), \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{-\infty}^{\infty} dz\ \rho(z')\rho(z)W_{\parallel}(z'-z). \end{aligned} \tag{14.190}$$

여기서, 인과율에 의해 $z' - z > 0$인 구간에서 $W_{\parallel}(z'-z) = 0$이므로, z에 대한 적분의 하한을 z'에서 $-\infty$로 바꾸었다. 주파수 영역에서의 전하 분포는 푸리에 역변환에 의해

$$\tilde{\rho}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\ e^{-i\omega z/c}\rho(z). \tag{14.191}$$

전하 분포 $\rho(z)$ 자체는 실수이므로,

$$\tilde{\rho}(-\omega) = \tilde{\rho}(\omega)^*. \tag{14.192}$$

전하 분포는 푸리에 모드에 대한 적분으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\rho(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{c} e^{i\omega z/c}\tilde{\rho}(\omega). \tag{14.193}$$

식 (14.193)의 $\rho(z)$과 식 (14.169)의 $W_{\parallel}(z)$를 식 (14.190)에 대입하고, 식 (14.192) 및 (14.188)를 사용하면, 에너지 변화 (14.190)는 다음과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$\Delta\mathcal{E} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\rho}(\omega)|^2 \mathrm{Re}Z_{\parallel}(\omega)d\omega. \tag{14.194}$$

여기서, $Z_{\|}(\omega) = Z_0^{\|}(\omega)$이고, 디락 델타 함수의 성질

$$\delta_{\mathrm{D}}(\omega' + \omega'') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' e^{i(\omega'+\omega'')z'},$$

이 사용되었고, $\mathrm{Re}Z_{\|}(\omega) = 1/2[Z_{\|}(\omega) + Z_{\|}(-\omega)]$이다. 에너지 변화는 임피던스의 실수부에만 의존함을 볼 수 있다. 또한 에너지 변화는 임의의 전하 분포 $\rho(z)$에 대해 반드시 음수이여야 하므로 (즉, 빔은 항상 에너지를 잃는다.)

$$\mathrm{Re}Z_{\|}(\omega) \geq 0 \quad \text{for all } \omega. \tag{14.195}$$

만약, 임피던스가 주파수 ω의 함수로서 매우 뾰족한 피크를 가지고 있으면, 우리는 광대역(broad band)이라고 부른다. 반면, 임피던스 스펙트럼이 매우 넓고 완만한 경우, 협대역(narrow band)이라 부른다 [2]. 푸리에 변환의 성질에 의해, 협대역 임피던스는 웨이크 함수가 z에 대해 긴 거리에 걸쳐 진동이 일어나도록 하며, 반면, 광대역 임피던스는 매우 짧은 거리에서 급격하게 감쇠하는 웨이크 함수를 준다. 좀 더 구체적으로 말하면, ω_0에서 폭 $\Delta\omega$의 피크를 가지는 협대역 임피던스는 파수 ω_0/c로 진동하며 거리 $c/\Delta\omega$에 걸쳐 천천히 감쇠하는 웨이크 함수에 해당한다. 주파수 폭이 $\Delta\omega \gg \omega_0$인 광대역 임피던스의 경우에는, 해당 웨이크 함수가 거리 $c/\Delta\omega$에서 진동을 할 겨를도 없이 빠르게 감쇠한다.

Loss factor

가속기에서의 웨이크 필드는 여러가지 안 좋은 효과를 가져온다. 다음 장에서 자세히 다룰 텐데, 우선 웨이크 필드는 빔동역학에 상당한 영향을 미친다. 뿐만아니라, 웨이크 필드를 통하여 빔으로부터 가속기 여러 구성요소들에 전해지는 에너지도 중요한데, 특히, 높은 빔전류로 운전하는 장치에서 더욱 그러하다. 어떤 상황에서는 웨이크 필드로부터 전달되는 파워가 빔위치 모니터(BPM, Beam Position Monitor)의 전극 등 진공챔버내의 여러 구성 요소들을 손상시키기도 한다. 웨이크 필드를 통하여 빔으로부터 진공챔버내의 여러 구성 요소들에 에너지가 전달되는 것을 'parasitic loss'(기생 손실) 또는 'higher-order mode(HOM) heating'(고차 모드 가열)이라고 부른다. 이번 장의 마지막 주제로 'loss factor'(손실계수)를 정의하기로 한다. 이 손실계수는 빔이 가속기 특정 영역을 지나면서 가져오는 파워 부하를 특성짓는 데 자주 사용된다.

어떤 빔번치가 빔파이프의 특정 영역을 지난다고 가정하자. 식 (14.158)에 정의한 (이 빔파이프 영역에서 형성되는) 포텐셜 $V(t')$을 이용하면, 빔번치 안의 입자가 얻는 총 에너지를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I(t')V(t')\, dt'. \tag{14.196}$$

여기서, $I(t')$은 시간 t'에서 그 특정 영역 입구에서의 빔전류 값이다. 빔은 가속기 내부의 웨이크 필드에 에너지를 잃게되므로, 에너지 이득 $\Delta\mathcal{E}$는 음수일 것으로 예상할 수 있다. 식 (14.158)의 $V(t')$를 위 식에

대입하면, 에너지 이득은 다음과 같이 웨이크 함수로 쓸 수 있다.

$$\Delta\mathcal{E} = -\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{0}^{\infty} dt I(t')I(t'-t)W_{\parallel}(-ct). \tag{14.197}$$

만약, 번치의 빔전류가 시간의 함수로 알려져 있고, 웨이크 함수도 알려져 있다면, 빔으로부터 빔파이프로 전달되는 에너지는 식 (14.197)로 부터 계산될 수 있다. 종종 이러한 에너지 전달을 웨이크 함수보다 임피던스로 표현하면 더 편리할 때가 있다. 먼저, 식 (14.197)에 있는 전류를 식 (14.160)에 정의된 전류의 주파수 스펙트럼으로 대체한다.

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E} &= \\ &-\int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{0}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega' t'} \tilde{I}(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t'-t)} \tilde{I}(\omega) W_{\parallel}(-ct).\end{aligned} \tag{14.198}$$

t'에 대한 적분을 수행하고 나면,

$$\Delta\mathcal{E} = -2\pi \int_{0}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \tilde{I}(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{I}(\omega) W_{\parallel}(-ct)\ \delta_{\mathrm{D}}(\omega+\omega'). \tag{14.199}$$

시간의 함수로서의 전류는 실수의 물리량이기 때문에, 전류의 주파수 스펙트럼은 다음의 성질을 가져야 한다.

$$\tilde{I}(-\omega) = \tilde{I}(\omega)^{*}. \tag{14.200}$$

따라서, 식 (14.199)는 다음과 같이 변환된다.

$$\Delta\mathcal{E} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left|\tilde{I}(\omega)\right|^{2} e^{-i\omega z/c} W_{\parallel}(z). \tag{14.201}$$

여기서, 적분변수를 t에서 $z = -ct$로 바꾸었고, $z > 0$에서 $W_{\parallel}(z) = 0$임을 이용하여 적분구간을 확대하였다. 마지막으로 식 (14.162)의 임피던스 정의를 사용하면, 빔번치의 에너지 이득은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta\mathcal{E} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left|\tilde{I}(\omega)\right|^{2} Z_{\parallel}(\omega). \tag{14.202}$$

우리는 다시한번 임피던스의 중요성을 확인해 볼 수 있다. 즉, 빔번치 에너지의 변화는 전류 스펙트럼 범위에 걸쳐있는 임피던스 성분의 크기에 의존하게 된다. 기생손실은 번치 길이가 진공챔버 내부의 공동의 크기와 엇비슷할 때 특히 심해질 수 있다.

손실계수 $\kappa_{\parallel}$(SI 단위계로 V C^{-1})는 빔번치의 총 전하량이 q_{bunch}라고 할때, 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta\mathcal{E} = -\kappa_{\parallel} q_{\mathrm{bunch}}^{2}. \tag{14.203}$$

임피던스를 이용하며 손실계수를 표현하면,

$$\kappa_{\parallel} = \frac{1}{q_{\mathrm{bunch}}^{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left|\tilde{I}(\omega)\right|^{2} Z_{\parallel}(\omega). \tag{14.204}$$

손실계수는 빔번치 내 전하의 빔진행 방향 분포에 의존한다. 저장링에서 총 빔전류가 $I_{\rm beam}$(여러개의 동일한 빔번치로 구성)라고 할 때, 손실계수 $\kappa_\parallel$인 어떤 빔 구성요소에 가해지는 총 파워 부하는

$$P = \kappa_\parallel q_{\rm bunch} I_{\rm beam}. \tag{14.205}$$

높은 품질인자를 가지는 공동 공진기에 짧은 빔번치들이 지나가는 경우에는, 손실계수에 대한 간단한 표현식을 공동 공진기의 변수들로 다음과 같이 유도할 수 있다. 먼저, 아래와 같이 전류가 Gaussian 형태의 시간에 대한 함수로 주어지는 번치를 가정하자.

$$I(t) = q_{\rm bunch} c \frac{e^{-c^2t^2/2\sigma_z^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma_z}. \tag{14.206}$$

여기서 σ_z는 rms(root mean square) 번치 길이이다. 식 (14.160)으로부터, 이 전류의 주파수 스펙트럼을 계산하면,

$$\tilde{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} I(t) = q_{\rm bunch} e^{-\omega^2\sigma_z^2/2c^2}. \tag{14.207}$$

이제 빔번치가 다음과 같은 빔진행 방향으로의 임피던스를 가지는 공동 공진기를 지나간다고 가정하자.

$$Z_\parallel(\omega) = \frac{R_s}{1 + iQ\left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r}\right)}. \tag{14.208}$$

식 (14.202)으로부터, 빔번치의 에너지 이득은

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} q_{\rm bunch}^2 \frac{R_s e^{-\omega^2\sigma_z^2/c^2}}{1 + iQ\left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r}\right)}, \\ &= -\frac{q_{\rm bunch}^2 R_s}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \frac{e^{-\omega^2\sigma_z^2/c^2}}{1 + Q^2\left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r}\right)^2}, \end{aligned} \tag{14.209}$$

로 쓸 수 있다. 위 적분 분모의 Gaussian 항때문에 복소평면에서의 경로적분으로는 계산이 안된다. 대신, $Q \gg 1$이고 $\omega_r\sigma_z/c \ll 1$인 경우에($\omega \approx \omega_r$에서의 기여가 지배적이 됨), 위 식의 적분은 다음과 같이 근사된다.

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &\approx -\frac{q_{\rm bunch}^2 R_s}{\pi} \omega_r e^{-\omega_r^2\sigma_z^2/c^2} \int_0^{\infty} d(\omega/\omega_r) \frac{1}{1 + Q^2\left(\frac{\omega_r}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_r}\right)^2}, \\ &\approx -q_{\rm bunch}^2 \frac{\omega_r}{2} \frac{R_s}{Q} e^{-\omega_r^2\sigma_z^2/c^2}. \end{aligned} \tag{14.210}$$

따라서, 식 (14.203)으로부터, 높은 품질인자의 공동 공진기에서 짧은 빔번치에 대한 손실계수는

$$\kappa_\parallel \approx \frac{\omega_r}{2} \frac{R_s}{Q} e^{-\omega_r^2\sigma_z^2/c^2}. \tag{14.211}$$

비슷한 방식으로 횡단면 방향으로의 손실계수 $\kappa_\perp$도 정의할 수 있다.

$$\kappa_\perp = \frac{1}{q_{\rm bunch}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi i} \left|\tilde{I}(\omega)\right|^2 Z_\perp(\omega). \tag{14.212}$$

식 (14.167)에 소개된 횡단면 방향 임피던스의 표기법에 따라 복소수 i가 분모에 들어가 있음에 주목해야 한다. 식 (14.189)를 적용하면, 위 식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\kappa_\perp = \frac{1}{q_{\text{bunch}}^2} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \left| \tilde{I}(\omega) \right|^2 \mathrm{Im} Z_\perp(\omega). \tag{14.213}$$

횡단면 방향 손실계수는 'kick factor(킥계수)'라고 불려지기도 한다. 킥계수는 빔파이프 특정 영역의 웨이크 필드로부터 빔번치가 횡단면 방향으로 받는 킥을 특성짓는다. 빔번치 안의 모든 입자들이 기준궤적에서 수평방향으로 x만큼 변위가 있을때, 수평방향으로의 평균적인 운동량 변화는

$$\langle \Delta p_x \rangle = -\frac{1}{cP_0} \int_{-\infty}^\infty dt' \int_0^\infty dt x I(t') I(t'-t) W_\perp(-ct), \tag{14.214}$$

이다. 여기서 운동량은 기준 운동량 P_0로 정규화한 값이다. 손실계수 $\kappa_\parallel$를 구할 때의 과정을 적용하면, 평균적인 운동량 변화는 다음과 같이 횡단면 방향 임피던스로 표현된다.

$$\langle \Delta p_x \rangle = -\frac{x}{cP_0} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi i} \left| \tilde{I}(\omega) \right|^2 Z_\perp(\omega). \tag{14.215}$$

또는, 킥계수를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\langle \Delta p_x \rangle = -\frac{x}{cP_0} q_{\text{bunch}}^2 \kappa_\perp. \tag{14.216}$$

위에서 구한 것은 평균적인 운동량이고, 모든 입자들이 똑같은 편향을 받는 것을 의미하지는 않는다. 빔번치 꼬리 부분의 입자들은 머리 부분의 입자들보다 훨씬 강한 웨이크 필드를 보게될 것이고, 따라서, 훨씬 큰 편향을 느끼게 된다.

참고 문헌

[1] A. Wolski, *Beam Dynamics in High Energy Particle Accelerators*, Imperial College Press, 2014.

[2] A. Chao, *Lectures on Accelerator Physics*, World Scientific, 2020.

[3] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics, 3rd edn.*, Wiley, 1999.

[4] K. L. F. Bane, The short range resistive wall wakefields, Tech. Rep. SLAC/AP-87, 1991.

[5] T.-Y. Lee et al., Towards a sextupole-free electron storage ring, Proceedings of IPAC2019, Melbourne, Australia, 2019.