

Fast wave에 의한 토카막 플라즈마 전류구동의 수치해석적 연구

Numerical Studies on Fast Wave Current Drive in Tokamak Plasmas

정모세, 홍상희

서울대학교 원자핵공학과

조수원

경기대학교 물리학과

1998년 10월 28일

요 약

토카막 플라즈마 내에서 fast wave에 의한 전류구동(FWCD)을 모사하는 전산코드를 개발하였다. 기존의 hot 플라즈마 모형과 계수축약법(order reduction algorithm)을 개선하여 전자에 의한 에너지 흡수가 자기충족적으로 고려된 새로운 파동방정식을 유도하였고, 이를 MHD 평형 계산으로부터 얻어진 자속 좌표계에서 표현하여 토로이달 및 폴로이달 방향으로의 Fourier 모드전개법과 부반경 방향으로의 1차원 유한요소법을 적용하여 수치적으로 풀었다. 전자의 에너지 흡수 기작으로는 ELD와 TTMP가 고려되었고, 전류구동량의 계산을 위해서는 PPPL(Princeton Plasma Physics Laboratory)에서 개발한 수치적 실험식이 사용되었다. 표면전류로 가정된 안테나 배열 사이에 적절한 위상차를 두어 비대칭적인 파수스펙트럼으로 fast wave를 발진시키면 토카막 중심부에 자장 방향으로의 전류가 구동됨을 확인하였고, 이를 KSTAR(Korea Superconducting Tokamak Advanced Research) 토카막에 적용하여 플라즈마 변수, 운전조건 등에 따른 FWCD의 특성을 논의하였다.

목 차

제 1 절 서론	1
1.1 연구 배경	1
1.2 FWCD의 기본원리	1
1.3 현재까지의 연구 현황	4
1.4 연구 목표 및 내용	5
제 2 절 MHD 평형 및 자속 좌표계	6
2.1 MHD 평형 모형	6
2.2 MHD 평형계산을 위한 수치해법	7
2.3 PICES 코드의 자속 좌표계	8
2.4 Stix 좌표계에서 전장의 표현	9
2.5 미분연산자의 표현	10
2.6 자속 좌표계의 선택	11
제 3 절 플라즈마 모형	13
3.1 Hot 플라즈마 유전텐서(dielectric tensor)	13
3.2 ICRF에서의 근사	14
3.3 FWCD 모사를 위한 단순화	15
3.4 분산관계식	16
3.5 고차 이온 공명에 대한 보정	16
3.6 플라즈마 분산 함수	17
제 4 절 Fast wave 파동방정식의 유도	18
4.1 파동방정식과 유전텐서의 결합	18
4.2 계수축약법의 적용	19
4.3 Weak-variational formulation의 적용	20
4.4 토로이달 및 풀로이달 모드 전개	20
제 5 절 에너지 흡수 및 전류구동	22
5.1 에너지 보존식	22
5.2 이온에 의한 에너지 흡수율	22
5.3 전자에 의한 에너지 흡수율	23
5.4 전류구동 효율	24
제 6 절 안테나 모형	26
6.1 표면 전류밀도	26
6.2 풀로이달 의존성	26

6.3 토로이달 의존성	27
6.4 배열인자(array factor)	28
6.5 안테나 출력 및 부하 저항	29
6.6 Faraday screen	29
제 7 절 수치해법 및 경계조건	31
7.1 1차원 유한요소화	31
7.2 요소행렬의 표현	31
7.3 Curl의 계산방법	32
7.4 보간함수	32
7.5 수치적분	33
7.6 시스템 행렬	34
7.7 경계조건	34
제 8 절 KSTAR 토카막에의 적용	36
8.1 주요 입력값	36
8.2 주요 계산결과	38

표 목차

1 KSTAR 토카막의 기본적인 설계값	36
2 플라즈마 porfile	37
3 안테나 설계값	37
4 운전모드	38
5 수치적 변수	38

그림 목차

1 Profiles of normal shear mode.	39
2 Profiles of reversed shear mode.	40
3 Mesh configuration for FWCD simulation	41
4 Antenna power spectrum	42
5 Distribution of fast wave electric field and absorbed power	43
6 Distribution of fast wave electric field and absorbed power	44
7 Toroidal mode spectrum of power and current drive efficiency	45
8 Distribution of fast wave electric field and absorbed power	46
9 Distribution of fast wave electric field and absorbed power	47

10	Distribution of fast wave electric field and absorbed power	48
11	Distribution of fast wave electric field and absorbed power	49
12	Distribution of fast wave electric field and absorbed power	50

제 1 절 서론

1.1 연구 배경

현재 까지의 핵융합 연구 장치 중에 가장 탁월한 밀폐성능을 보이는 것은 토카막(tokamak)이다. 토카막은 도우넛 모양의 진공용기에 외부에서 인가한 강력한 토로이달(toroidal) 자장으로 플라즈마를 가두고 여기에 전류를 발생시킨 것이다. 플라즈마 전류에 의한 자체적인 폴로이달(polloidal) 자장은 외부의 토로이달 자장과 결합하여 나선형의 자장 구조를 형성하고, 이 나선형의 자장 구조가 플라즈마의 밀폐성능을 획기적으로 개선시킨다. 통상적인 토카막 실험은 변압기에서처럼 자기유도(magnetic induction)에 의해 발생되는 플라즈마 전류를 이용하므로, 본질적으로 펄스 운전이다. 그러나 토카막이 실용적인 에너지원으로써 의미를 가지려면 정상상태의 운전이 가능해야 하고, 이것은 비유도성 전류구동 방법(non-inductive current drive)에 의해서만 근원적으로 해결될 수 있다[1]. 비유도성 전류구동 방법은 크게 중성입자빔 주입(Neutral Beam Injection, NBI)에 의한 방법과 RF(RadioFrequency)파에 의한 방법으로 나눌 수 있다. RF파에 의한 전류구동 방법은 다시 주파수 범위 및 파의 종류에 따라, FWCD(Fast Wave Current Drive), MCCD(Mode Conversion Current Drive), LHCD(Lower Hybrid Current Drive), ECCD(Electron Cyclotron Current Drive) 등으로 분류된다. 언급한 여러 방법중 특별히 높은 전류구동 효율을 갖는 것은 LHCD와 NBICD이며, 전통적으로 이 두 방법이 집중적으로 연구 되어 왔다. 하지만 ITER(International Thermonuclear Experimental Reactor)와 같은 공학적 문제를 다루게 된 요즈음에는, 높은 밀도에서 나타나는 전자파 차단(cutoff)때문에 토카막 중심부에서 전류구동이 불가능한 LHCD는 주 전류구동 방법으로 사용하기가 힘들어지고 있고, NBICD는 음이온원 개발이나 설치공간, 경제성 등의 기술적인 문제에 부딪히고 있기 때문에, 두 방법의 단점을 보완할 수 있는 다른 전류구동 방법을 개발하는 방향으로 연구가 진행되고 있다. ECCD는 고출력 마이크로파원의 개발이 선행되어야 하나, 현재까지는 그 출력에 한계가 있고 유지시간이 짧으므로 부분적인 전류분포 조정에만 사용하도록 제안되고 있으며, MCCD는 fast wave를 ion Bernstein wave로 모드천이(mode conversion)시켜 전류를 얻는 방법으로 off-axis 영역의 전류구동에 적합하여 전류분포 제어 연구와 관련되어 최근 주목을 받고 있다. 한편, FWCD는 토카막 중심부의 고밀도 영역에 전류를 발생시키는데 잇점이 있고, 고출력 정상운전의 RF원이 이미 상업화되어 있어서, 중간진입 전략을 활용하여 국내의 핵융합 연구수준을 빠른 시일내에 세계화시키는데 알맞은 연구주제이다[2][3] [4] .

1.2 FWCD의 기본원리

이온 싸이클로트론 주파수 영역(Ion Cyclotron Range of Frequency. ICRF)의 전자파를 자화된 플라즈마에 발진시키면 상대적인 위상속도의 크기에 따라 명확히 분리되는 두 개의 모드, fast wave와 slow wave가 발생된다. 이 중 fast wave는 R- 또는 X-wave로서 compressional Alfvén wave에 해당되는 모드이고, slow wave는 L-wave로서 shear Alfvén wave 또는 ion cyclotron wave에 해당되는 모드이다. Fast wave는 외부자장과 수직한 전장 성분에 의해 주로 전파되고, slow wave는 외부자장과 평행한 전장 성분에 의해 주로 전파된다. 그러나, 토카막과 같은 고밀도 플라즈마에서 비교적 저주파인 ICRF 전자파를 발진시키면 질량이 작은 전자가 외부자장을 따라 이동하면서 빠른 시간 내에 발생된 전장을 차폐시키

기 때문에 slow wave의 전파는 쉽지 않고, fast wave만이 플라즈마에 결합되어 전파될 수 있다. 각각의 분산식은 cold 플라즈마 모형에 의해 아래와 같이 주어진다[5, 6, 7, 8].

$$n_{\perp F}^2 \simeq \frac{(R - n_{\parallel}^2)(L - n_{\parallel}^2)}{S - n_{\parallel}^2} \quad (1)$$

$$n_{\perp S}^2 \simeq \frac{P}{S}(S - n_{\parallel}^2) \quad (2)$$

여기서, R, L, P, S 는 Stix[6]에 의해 정의된 cold 플라즈마 유전텐서의 성분이고, $n_{\perp}(n_{\parallel})$ 은 수직(수평) 방향의 굴절율이며, 첨자 $F(S)$ 는 fast(slow) wave를 나타낸다. 위의 분산식을 통해 참고적으로 알 수 있는 fast wave의 성질은 첫째, fast wave에 대해서도 저밀도의 토카막 경계 영역에 $n_{\perp F}^2 < 0$ 인 전자파 차단층이 있어서 큰 평행 굴절률 n_{\parallel} 에 대해 filtering을 한다는 것이고[9], 둘째는, $n_{\perp F}^2$ 가 밀도에 따라 증가하는 경향을 보이므로, fast wave가 토카막 중심부로 전파해 가면서 점점 focusing 된다는 것이다[8].

Fast wave는 ELD(Electron Landau Damping), TTMP(Transit Time Magnetic Pumping)와 같은 전자파와 플라즈마 사이의 비충돌성 상호작용에 의해 전자에 에너지를 전달한다. 전자는 fast wave의 전자장에 의해 외부자장 방향으로 다음과 같은 힘을 받는데,

$$F_{\parallel} = q_e E_{\parallel} - \mu_e \nabla_{\parallel} B_{\parallel} \quad (3)$$

그 크기가 작은 평행 전장 성분 E_{\parallel} 은 ELD에 기여하고, 그 크기가 큰 평행 자장 성분 B_{\parallel} 은 TTMP에 기여한다. 윗 식에서 $q_e (= -e)$ 는 전자의 전하, $\mu_e (= m_e v_{\perp}^2 / 2B)$ 는 전자의 자기모멘트를 나타낸다. 단일 전자가 속도 분포를 가진다면,

$$\omega - k_{\parallel} v_{\parallel e} = 0 \quad (4)$$

근처에서 이러한 힘에 의해 fast wave와 전자들 사이의 실질적인 에너지 교환이 일어난다. 그러나 ELD와 TTMP는 서로 간섭하는 효과가 있어서, 에너지 흡수율이, 다른 비충돌성 상호작용, 예를 들어 싸이클로트론 공명(cyclotron resonance) 등에 비해 상대적으로 낮다[9].

ELD와 TTMP의 결과로 전자의 속도 분포는 준선형적(quasilinear)으로 확산된다. 이 때, fast wave가 비대칭적 파수 스펙트럼을 가지면 속도 분포도 비대칭적이 되어, 한 쪽 방향으로의 유동속도 성분이 생기면서 전류가 구동된다. FWCD에 의해 구동될 수 있는 전류량은 RF원에서 공급되는 입력에 직접적으로 비례한다. 따라서 입력이 크면 클수록 많은 양의 전류를 구동시킬 수 있겠지만, 경제성 등의 이유로 공급 가능한 입력은 전체 핵융합 반응에서 얻어진 출력의 약 20 % 정도로 제한되므로, 주어진 공급 입력에서 최대한의 전류량을 얻는 문제, 즉 전류구동 효율을 높이는 것이 FWCD 연구의 핵심이 된다.

FWCD의 효율을 높이기 위해서는 첫째, fast wave의 동작 주파수를 적절히 선택하여 불필요한 이온에 의한 에너지 흡수를 줄여야 한다[2, 10]. Cold 플라즈마 모형에서도 예측할 수 있는 이온 흡수는 식 (1)에서 $S - n_{\parallel}^2 = 0$ 인 경우인데, 단일 이온 플라즈마에서는 Alfvén 공명, 복합 이온 플라즈마에서는 이온 복합 공명(ion-ion hybrid resonance)에 해당한다. 각각의 주파수는

$$\omega_A^2 \simeq \frac{\Omega_i^2}{1 + \omega_{pi}^2 / (c^2 k_{\parallel}^2)} \quad (5)$$

$$\omega_{ii}^2 \simeq \frac{\Omega_{i1}\Omega_{i2}}{\eta_{i1}\Omega_{i1} + \eta_{i2}\Omega_{i2}} \frac{\eta_{i1}\Omega_{i2} + \eta_{i2}\Omega_{i1}}{\eta_{i1}\Omega_{i1} + \eta_{i2}\Omega_{i2}} \quad (6)$$

로 근사된다. 여기서, ω_{pi} 는 이온의 플라즈마 주파수, Ω_i 는 이온의 싸이클로트론 주파수이며, $\eta_{i1}(\eta_{i2})$ 는 이온종 1(2)의 구성비이다. 만일 $\Omega_{i1} < \Omega_{i2}$ 라면, 각 주파수는 $\omega_A < \Omega_i$, $\Omega_{i1} < \omega_{ii} < \Omega_{i2}$ 의 범위에 있음을 알 수 있다. Hot 플라즈마 모형에서만 설명가능한 이온 흡수에는 싸이클로트론 공명이 있는데, 그 조건은 식 (4)의 일반화된 형태로,

$$\omega - l\Omega_i - k_{\parallel}v_{\parallel i} = 0 \quad (7)$$

이다. 여기서 l 은 싸이클로트론 하모닉스(harmonics)라고 부르는 정수이다. 일반적인 ICRF 실험조건에서 $k_{\parallel}v_{\parallel i}/\Omega_i \ll 1$ 이므로 싸이클로트론 공명이 일어나는 주파수는

$$\omega \simeq l\Omega_i \quad (8)$$

가 된다. 예외적으로, $l = 1$ 이고 단일 이온 플라즈마인 경우에는 fast wave의 편광이 이온의 싸이클로트론 운동과 정확히 상쇄되어 에너지 전달이 일어나지 않는다. 이상에서 언급한 여러 이온 흡수 채널을 피해 최적화된 동작 주파수를 선택하기란 쉽지 않다. 일반적으로 전자에 의한 에너지 흡수율은 주파수에 따라 증가한다[10]. 따라서 모든 싸이클로트론 공명 주파수를 피해 비교적 낮은 동작 주파수를 선택하면, 이온 흡수율은 줄일 수 있겠지만 전자에 의한 에너지 흡수율은 낮아지고, 단일 이온 플라즈마인 경우라면 Alfvén 공명까지 만나게 된다. 반대로 비교적 높은 동작 주파수를 선택하면, 전자에 의한 에너지 흡수율은 높지만 싸이클로트론 공명 주파수가 춤출히 위치하게 되어 이온 흡수율을 피할 수 없게 된다. 싸이클로트론 공명에 의한 효과는 l 의 증가에 따라 $(k_{\perp}\rho_i)^{l-1}$ 에 비례하여 감소하므로[9], 최악의 경우엔 $l = 1, 2$ 에 해당하는 싸이클로트론 공명 주파수만이라도 피하는 것이 좋다.

FWCD의 효율을 높이기 위한 두 번째 고려사항은 최적화된 fast wave 위상속도의 결정이다[2, 10]. 먼저, ELD와 TTMP에 의한 전자의 에너지 흡수율은 수직 파수의 허수부를 통해 다음과 같이 예측될 수 있다.

$$P_e \propto 2\text{Im}(k_{\perp}) \simeq \text{Re}(k_{\perp}) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \beta_e \zeta_e e^{-\zeta_e^2} \quad (9)$$

여기서, $\text{Re}(k_{\perp}) \simeq \omega/v_A$ 이고, $v_A (= \sqrt{B^2/\mu_0 n_i m_i})$ 는 Alfvén 속도, $\beta_e (= 2\mu_0 n_e T_e/B^2)$ 는 전자의 베타값, $\zeta_e (= v_p/v_{te})$ 는 fast wave의 평행 방향 위상속도($v_p = w/k_{\parallel}$)와 전자의 열속도($v_{te} = \sqrt{2T_e/m_e}$)의 비이다. 윗 식을 ζ_e 에 관한 함수로 볼 때, $\zeta_e = 1/\sqrt{2}$ 에서 그 값이 최대가 된다. 즉, fast wave의 평행 방향 위상속도가 전자의 열속도보다 약간 작을 때($v_p = 1/\sqrt{2}v_{te} < v_{te}$), 전자의 에너지 흡수율이 최대가 된다는 뜻이다. 한편, Ehst와 Karney의 연구[11]에 의하면 정규화된 전류구동 효율, \tilde{j}/\tilde{p}_{RF} 은 ζ_e^2 에 비례한다. 이것은 평행 속도가 큰 전자를 가속할수록 충돌에 의한 감속과 입자 trapping 효과가 줄어들어 전류구동 효율이 높아짐을 의미한다. 최종적으로 fast wave에 의해 구동되는 전류 밀도는 정규화된 전류구동 효율과 전자의 에너지 흡수율과의 곱으로 아래와 같이 표현되므로[10, 11],

$$J_{\parallel} = \left[\frac{19.19 \times 10^{15}}{\ln \lambda} \frac{T_e/e}{n_e} \frac{\tilde{j}_{\parallel}}{\tilde{p}_{RF}} \right] P_e \propto \zeta_e^3 e^{-\zeta_e^2} \quad (10)$$

일정한 공급 입력하에서 최대한의 전류 밀도를 얻으려면, fast wave의 평행 방향 위상속도가 전자의 열속도보다 약간 커야함을 알 수 있다. 즉, $\zeta_e = \sqrt{3/2}$, 또는 $v_p = \sqrt{3/2}v_{te} > v_{te}$ 어야 한다. 그러나 최적화된 ζ_e 값은 실제적인 기하학적 조건이나 물리적 상황에 따라 위에서 예상한 값과 차이를 보이기 때문에 앞으로 좀더 연구되어야 할 주제이다. 결국, 안테나의 파수 스펙트럼은 그 최대값이 fast wave가 토카막 중심부에서 최적화된 ζ_e 값을 갖도록 설계되어야 한다.

1.3 현재까지의 연구 현황

FWCD의 특성을 연구하기 위해서는 먼저, 토카막 플라즈마 내에서 fast wave의 전파와 흡수에 대한 정량적인 정보를 얻어야 한다. 이를 위한 기본적인 방법에는 ray tracing과 full-wave modeling이 있다. 플라즈마의 밀도가 높고 전자파의 파장이 토카막의 부반경보다 비교적 작을 때 ray tracing 방법을 이용한다. Ray tracing 방법은 평행파수에 대한 폴로이달 자장의 효과를 얻기가 쉽고 ion Bernstein wave를 추적할 수 있으나, 회절과 복합적인 반사가 무시되므로 폴로이달 방향으로 유한한 안테나를 가지는 경우나 전자파의 감쇠가 약해 완전히 흡수되기 전에 여러번의 반사가 일어나는 경우에는 적용하기 어려운 한계가 있어서 FWCD의 모사에는 적절치 못하다. Full-wave modeling은 fast wave의 흡수와 전류구동에 중요한 회절 효과와 파면의 복합적인 반사를 적절히 취급할 수 있으나, ion Bernstein wave를 분석하려면 너무 많은 격자수가 필요하고, 또, 폴로이달 방향으로 유한차분법을 사용할 경우 평행파수에 대한 폴로이달 자장의 효과를 제대로 반영하기 어려운 단점이 있다[4].

Full-wave modeling은 1980년대 중반부터 여러 연구자들에 의해 ICRH(Ion Cyclotron Resonance Heating) 모사를 위한 전산코드 개발에서 시작되었다[12, 13]. 초기의 코드들은 cold 플라즈마 모형을 사용하고 이온 복합 공명에서의 수학적인 특이점을 피하기 위하여 가상적인 충돌 주파수를 사용하였는데, 그 결과로 이온 싸이클로트론 공명과 같은 hot 플라즈마 효과를 제대로 기술하지 못하였다. 그 후, hot 플라즈마 분산 관계식의 해 중 fast wave에 해당하는 근만을 선택적으로 이용하는 계수축약법(Order Reduction Algorithm, ORA)이 1987년 Smithe 등[14]에 의해서 제안되어 ion Bernstein wave에 의한 수치적 문제점을 해결하면서도 hot 플라즈마 효과를 고려하기 시작했다. 전자의 FLR(Finite Larmor Radius) 효과는 이온에 비해 매우 작기 때문에 이들의 연구에서는 무시되었고, 1991년 Moroz 등[15]이 전자에 의한 fast wave 흡수를 고려하였으나, 평행 전장 성분이 불완전하게 취급되었다. 1993년 Jaeger 등[16]은 평행 전장 성분을 자기충족적으로 고려하고 자속좌표계를 사용한 PICES 코드를 발표하였으나, 전자의 FLR항에도 계수축약법을 적용하여 원점근처에서의 특이성을 초래하였다. 이런 문제점을 해결하기 위해, 1998년 Jaeger 등[17]은 이온의 FLR항에 대해서만 계수축약법을 적용하고, 전자의 FLR항에 대해서는 미분연산자를 사용하는 새로운 방법을 제안하였다. 이 밖에 계수축약법을 사용하지 않고, 가상적인 충돌 주파수를 통해 ion Bernstein wave를 그 파장이 너무 짧아지기 전에 감쇠시키는 방법(artificial damping)도 연구되었는데, 1988년 Brambilla 등[18]은 이 방법을 적용하여 FISIC 코드를 발표하였다. 이들은 토로이달 및 폴로이달 모드 전개법을 사용하여 평행파수에 대한 폴로이달 자장의 효과를 제대로 반영하였으나, 원형단면 토카막으로 제한되었다. 1996년 Brambilla[19]는 PICES의 자속좌표계를 도입하여 FISIC의 해석대상을 비원형단면 토카막으로 확장한 새로운 코드 TORIC을 발표하였다. 특히 이 코드에서는 계수축약법과 artificial damping법과의 비교 연구를 통해 계수축약법이 계산시간이 빠르면서도 비교적 정확한 결과를 주는 것으로 결론을 내려, 계수축약법의 실용성을 부각시켰다.

한편, fast wave에 의해 구동되는 전류량을 계산하려면 full-wave modeling과는 별도로 동력학적인 계산이 필요하다. 이를 위한 가장 일반적인 이론 모형은 Coulomb 충돌에 의한 정상상태의 Fokker-Planck 방정식에 fast wave 전자장에 의해 유기된 준선형적 확산항을 고려하여 위상공간상에서 전자의 속도 분포함수를 계산하는 것이지만, 이러한 계산을 위해서는 별도의 2차원 Fokker-Planck 코드가 필요하게 되므로 통합된 FWCD 모사에는 적절치 않다. 따라서 대부분의 FWCD 모사 전산코드에서는 1991년

PPPL의 Ehst와 Karney가 개발한 수치적 실험식을 사용하게 된다. 이 실험식은 Karney가 개발한 2차원 Fokker-Planck 코드를 Ehst가 다양한 변수에 대해 수치실험한 후, 몇 개의 간단한 매개함수로 그 결과를 표현한 것으로, 비록 원형단면에 대해 계산된 것이지만 입자 trapping 효과까지 고려되어 있어서 매우 실용적인 식이다. 1997년 Wright 등[20]은 fast wave 전자장에 의한 준선형적 확산항을 직접 계산하여, Ehst와 Karney의 실험식을 full-wave modeling에 적용하는 올바른 방법을 제안하였으며, 토카막의 형상비(aspect ratio, $A \equiv R/r$)가 3이상인 곳에서는 입자 trapping 효과도 정확히 계산된다는 결과를 제시하였다.

1.4 연구 목표 및 내용

이 연구의 최종적인 목표는 full-wave modeling 방법에 의한 FWCD 모사 전산코드의 개발이다. 이를 위해 hot 플라즈마 모형을 사용하여 FWCD에 주요한 역할을 하는 ELD, TTMP, ICRH 등의 효과를 반영하였고, ICRF에서 전자나 이온의 선회반경이 fast wave의 파장에 비해 작다는 것을 이용하여 유전 텐서를 선회반경의 2차항까지 전개하여 단순화시켰다. Ion Bernstein wave에 의한 수치적인 문제점을 해결하기 위해서는 계수축약법을 도입하여 파동방정식을 유도하였는데, 이온의 FLR항에 대해서만 계수축약법을 적용하고 전자의 FLR항에 대해서는 미분연산자를 사용하는 새로운 방법을 취하였다. FWCD는 전자에 의한 에너지 흡수가 중요하므로 E_{\parallel} 을 자기충족적으로 고려하였고, 폴로이달 및 토로이달 모드 전개법을 사용하여 k_{\parallel} 에 대한 폴로이달 자장의 효과를 반영하였다. 실제적인 토카막의 기하학적 구조와 자장 구조를 고려하기 위해 별도의 MHD 평형코드를 동시에 개발하였고, 이를 PICES 코드의 자속좌표계를 도입하여 full-wave modeling과 결합시켰다. Fast wave를 발진시키는 안테나는 표면전류로 가정하되, 토로이달 모드에 대한 스펙트럼과 array factor를 고려하여 FWCD 모사에 적합하도록 표현하였다. 전류구동량의 계산을 위해서는 Ehst와 Karney의 수치적 실험식을 Wright 등이 제안한 방법으로 full-wave modeling에 적용시켰다. Fast wave 파동방정식을 풀기위한 수치해법으로는 Galerkin형 가중함수에 의한 1차원 유한요소법을 적용하였고, 계산시간을 줄이고 진공 영역에서의 가상적인 해의 출현을 막기위해 선형 보간함수를 이용하였다. 최종적으로 완성된 FWCD 모사 전산코드는 부반경 방향의 최대 격자수, 폴로이달 방향의 최대 모드수에 따른 수렴성 조사를 통해 그 유효성을 검증하였고, 이를 KSTAR(Korea Superconducting Tokamak Advenced Research) 토카막[21]에 적용하여 플라즈마 변수, 운전조건 등에 따른 기본적인 FWCD의 특성을 논의하였다.

제 2 절 MHD 평형 및 자속 좌표계

2.1 MHD 평형 모형

축대칭의 이상적인 MHD 평형문제는 원통좌표계 (R, Z, ϕ) 에서 비선형 2계 타원 편미분방정식인 Grad-Shafranov 방정식으로 기술된다[22, 23, 24].

$$\Delta^* \psi = R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi}{R^2} \right) = \mu_0 R J_\phi = -\mu_0 R^2 \frac{dp(\psi)}{d\psi} - \frac{1}{2} \frac{dF^2(\psi)}{d\psi} \quad (11)$$

이 때, 평형상태에서의 자장과 전류밀도는

$$\mathbf{B} = \nabla \phi \times \nabla \psi + F \nabla \phi \quad (12)$$

$$\mu_0 \mathbf{J} = -\nabla \phi \times \nabla F + \Delta^* \psi \nabla \phi \quad (13)$$

로 표현된다. 여기서, 미지수인 ψ 는 보통 자속함수라고 부르며 $\psi = -RA_\phi$ 로 정의되고, 특정 자속면 내부의 폴로이달 자속(ψ_{pol})과 다음의 관계를 갖는다.

$$\psi_{pol} = 2\pi(\psi - \psi_{axis})$$

또, F 는 보통 토로이달 자장함수라고 부르며 $F = RB_\phi$ 로 정의되고, 특정 자속면 외부의 폴로이달 전류(I_{pol})와 다음의 관계를 갖는다.

$$I_{pol} = 2\pi F(\psi)/\mu_0$$

Grad-Shafranov 방정식을 푸는데 있어서, 플라즈마 압력 p 와 토로이달 자장함수 F 는 그 profile의 자속함수로 미리 주어져야 한다. F 의 profile을 직접 주고 푸는 대신 다음의 관계식을 이용하면, 자장방향의 전류분포를 임의로 주고 평형계산을 할 수 있다[24].

$$\frac{1}{2} \frac{dF^2}{d\psi} = \frac{< B_\phi^2 >}{< B^2 >} \left(-\mu_0 \frac{< \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} >}{< \mathbf{B} \cdot \nabla \phi >} - \mu_0 \frac{1}{< 1/R^2 >} \frac{dp(\psi)}{d\psi} \right) \quad (14)$$

여기서, $< \dots >$ 는 자속면에 대한 평균을 나타내고, 폴로이달 방향의 일반적인 방위각 χ 와 Jacobian J 에 대해

$$< A > = \frac{\oint_{\psi=const.} AJ d\chi}{\oint_{\psi=const.} J d\chi} \quad (15)$$

로 표현된다. 위 식을 F 에 대한 상미분 방정식으로 다시 쓰면,

$$\frac{dF}{d\psi} = \frac{FC_2 D}{F^2 C_2 + C_3}$$

이고, 계수들은

$$D \equiv \left(-\mu_0 \frac{< \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} >}{< \mathbf{B} \cdot \nabla \phi >} - \mu_0 \frac{C_1}{C_2} \frac{dp(\psi)}{d\psi} \right)$$

$$\begin{aligned} C_1(\psi) &= \oint_{\psi=const.} J d\chi \\ C_2(\psi) &= \oint_{\psi=const.} \frac{1}{R^2} J d\chi \\ C_3(\psi) &= \oint_{\psi=const.} \frac{|\nabla \psi|^2}{R^2} J d\chi \end{aligned}$$

으로 정의되었다. 결과적으로 이 연구에 사용된 입력 profile은 다음과 같다[10].

$$p(\psi) = p_0 \left[\theta_p (1 - \hat{\psi}^{\beta_p})^{\alpha_p} + (1 - \theta_p) (1 - \hat{\psi}^{\delta_p})^{\gamma_p} \right]$$

$$\frac{<\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}>}{<\mathbf{B} \cdot \nabla \phi>}(\psi) = J_0 (1 - \hat{\psi}^{\beta_J})^{\alpha_J} + \frac{\sigma d^2 \hat{\psi}^{N_1} (1 - \hat{\psi})^{N_2}}{(\hat{\psi} - a_0)^2 + d^2}$$

여기서, $\hat{\psi}$ 는 정규화된 폴로이달 자속이며

$$\hat{\psi} = \frac{\psi - \psi_{axis}}{\psi_{sep} - \psi_{axis}}$$

로 정의된다. 이러한 방법으로 평형을 계산하면 전류분포에 따른 MHD 평형의 효과를 알아보기가 쉬워서, 전류구동 모사와 MHD 평형을 결합하여 연구를 수행하는데 잇점이 있다. 하지만, Grad-Shafranov 방정식을 푸는 과정 중에 자기축과 자속면을 찾아서 mapping하는 단계와 F 에 대한 상미분 방정식을 푸는 단계가 추가로 들어가야 한다.

2.2 MHD 평형계산을 위한 수치해법

Grad-Shafranov 방정식을 풀기위한 수치해법으로는 Galerkin형 가중함수에 의한 유한요소법을 적용하였고, source 항에 포함된 비선형성은 Picard 반복계산법을 사용하여 처리하였다[24]. 따라서 최종적으로 풀어야 하는 식은 weak variational formulation에 의해,

$$\int \int_{\Omega} \left[\frac{1}{R} \nabla \omega \cdot \nabla \psi^{(k+1)} \right] dS = - \int \int_{\Omega} \omega \mu_0 J_{\phi}(\psi^{(k)}) dS \quad (16)$$

로 표현된다. 여기서 ω 는 Galerkin형 가중함수로서 이 연구에서는 bi-linear 함수가 사용되었고, k 는 반복계산의 단계를 나타낸다. Separatrix라고도 불리는 플라즈마 경계($\partial\Omega$)는 타원율(κ)과 삼각율(δ)을 이용하여 아래와 같이 주어지고,

$$R_{sep} = R_0 + a \cos(\theta' + \delta \sin \theta')$$

$$Z_{sep} = \kappa a \sin \theta'$$

경계조건으로는, 자속함수가 일종의 포텐셜이므로 플라즈마 경계에서 임의로

$$\psi|_{sep} = 0$$

으로 택한다. 따라서, 계산영역 내부에서 자속함수는 음수가 된다. 또, 자기축에서는 자속함수가 방위각에 무관하게 일정한 값을 갖도록 해야한다. 실제 수치계산 단계에서는 mapping을 조작적으로 하고, 또 플라즈마 경계를 잘 맞추어주기 위해 다음과 같은 비직교 좌표계 (σ, θ) 를 도입하였다[22, 24].

$$R = R_{axis} + \sigma r_{sep}(\theta) \cos \theta$$

$$Z = Z_{axis} + \sigma r_{sep}(\theta) \sin \theta$$

$$0 \leq \sigma \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

여기서, r_{sep} 는 자기축에서 플라즈마 경계까지의 거리를 나타내고, σ 는 정규화된 부반경, θ 는 폴로이달 방향의 방위각을 나타낸다. 따라서 식 (46)은

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\sigma}{R} \left[\frac{\partial \omega}{\partial \sigma} \frac{\partial \psi^{(k+1)}}{\partial \sigma} + \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{r'_{sep}}{r_{sep}} \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi^{(k+1)}}{\partial \theta} - \frac{r'_{sep}}{r_{sep}} \frac{\partial \psi^{(k+1)}}{\partial \sigma} \right) \right] d\theta d\sigma \\ = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \omega \mu_0 J_\phi(\psi^{(k)}) \sigma r_{sep}^2 d\theta d\sigma \end{aligned} \quad (17)$$

로 변환된다. 윗 식을 이용하여 요소행렬을 구성하는데 있어서는 Gauss 적분법이 사용되었다.

F 에 대한 상미분 방정식을 풀기위한 수치해법으로는 Runge-Kutta 법과 Adams-Bashforth 법이 사용되고[25], 경계조건으로는

$$F(\psi_{sep}) = B_{\phi 0} R_0$$

을 적용하였다. 여기서, R_0 는 토카막 중심의 주반경, $B_{\phi 0}$ 는 진공일때 R_0 에서의 토로이달 자장 세기를 뜻한다.

2.3 PICES 코드의 자속 좌표계

실제적인 토카막의 기하학적 구조와 자장 구조를 파동방정식에 고려하기 위해 축대칭의 자속 좌표계 (ρ, θ, ζ) 를 도입한다[16, 19].

$$\begin{aligned} X &= X(\rho, \theta, \zeta) = R(\rho, \theta) \cos\{\phi(\zeta)\} \\ Y &= Y(\rho, \theta, \zeta) = -R(\rho, \theta) \sin\{\phi(\zeta)\} \\ Z &= Z(\rho, \theta) \end{aligned} \quad (18)$$

여기서, ρ 는 ψ 가 일정한 면을 나타내는 임의의 단조증가 함수로서 부반경의 역할을 하고, θ 는 폴로이달 방위각, $\zeta (= \phi)$ 는 토로이달 방위각이다. 또, (X, Y, Z) 는 직교 좌표계의 세 성분, (R, Z, ϕ) 는 원통 좌표계의 세 성분을 각각 뜻한다. 위 변환의 metric 텐서는

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} N_\psi^2 & G & 0 \\ G & N_\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

로 표현되고, 아래의 원소들을 갖는다.

$$\begin{aligned} N_\psi^2 &= \left(\frac{\partial R}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} \right)^2 \\ G &= \frac{\partial R}{\partial \rho} \frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{\partial Z}{\partial \rho} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \\ N_\chi^2 &= \left(\frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned} \quad (20)$$

한편, $(R, Z) \rightarrow (\rho, \theta)$ 의 변환으로부터 Jacobian J 를 정의하면,

$$dA = dR dZ = J d\rho d\theta$$

이므로,

$$J = \frac{\partial R}{\partial \rho} \frac{\partial Z}{\partial \theta} - \frac{\partial Z}{\partial \rho} \frac{\partial R}{\partial \theta} \quad (21)$$

로 정의되고, 따라서 metric 텐서의 determinant, $\det(g_{ij})$ 는

$$\det(g_{ij}) = R^2 J^2$$

로 쓸 수 있다. 이 좌표계의 기저가 되는 단위 벡터는

$$\begin{aligned} \hat{e}_\psi &= \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|} \\ \hat{e}_\chi &= \hat{e}_\zeta \times \hat{e}_\psi \\ \hat{e}_\zeta &= \frac{\nabla \zeta}{|\nabla \zeta|} \end{aligned} \quad (22)$$

로 정의되며, 원통 좌표계의 단위 벡터와는 다음의 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} \hat{e}_\psi &= \frac{1}{N_\chi} \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} \hat{R} - \frac{\partial R}{\partial \theta} \hat{Z} \right) \\ \hat{e}_\chi &= \frac{1}{N_\chi} \left(\frac{\partial R}{\partial \theta} \hat{R} + \frac{\partial Z}{\partial \theta} \hat{Z} \right) \\ \hat{e}_\zeta &= \hat{\phi} \end{aligned} \quad (23)$$

한편, 이 좌표계에서 쓰이는 체적소와 면적소는 각각 다음과 같다.

$$dV = RJd\rho d\theta d\zeta$$

$$d\mathbf{S} = RN_\chi d\theta d\zeta \hat{e}_\psi$$

2.4 Stix 좌표계에서 전장의 표현

파동방정식의 전장 성분들을 유전텐서와 효과적으로 결합시키기 위해 다음과 같은 Stix 좌표계를 도입한다.

$$\begin{aligned} \hat{e}_\psi &= \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|} \\ \hat{e}_\eta &= \hat{e}_b \times \hat{e}_\psi = \cos \Theta \hat{e}_\chi - \sin \Theta \hat{e}_\zeta \\ \hat{e}_b &= \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} = \sin \Theta \hat{e}_\chi + \cos \Theta \hat{e}_\zeta \end{aligned} \quad (24)$$

여기서, Θ 는 풀로이달 자장과 토로이달 자장이 이루는 각도로서

$$\tan \Theta = \frac{B_p}{B_t} \quad (25)$$

로 정의된다. 따라서, 전장은

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_R \hat{R} + E_Z \hat{Z} + E_\phi \hat{\phi} \\ &= E_\psi \hat{e}_\psi + E_\chi \hat{e}_\chi + E_\zeta \hat{e}_\zeta \\ &= E_\psi \hat{e}_\psi + E_\eta \hat{e}_\eta + E_b \hat{e}_b \end{aligned}$$

등으로 표현이 가능하고, 서로간에 다음의 관계를 갖는다.

$$\begin{aligned} E_R &= \frac{1}{N_\chi} \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} E_\psi + \frac{\partial R}{\partial \theta} E_\chi \right) \\ E_Z &= \frac{1}{N_\chi} \left(-\frac{\partial R}{\partial \theta} E_\psi + \frac{\partial Z}{\partial \theta} E_\chi \right) \\ E_\phi &= E_\zeta \end{aligned} \quad (26)$$

또는,

$$\begin{aligned} E_\chi &= \cos \Theta E_\eta + \sin \Theta E_b \\ E_\zeta &= -\sin \Theta E_\eta + \cos \Theta E_b \end{aligned} \quad (27)$$

한편, fast wave를 다루는데 있어서, 외부 자장에 수직한 전장 성분을 편광(polarization)을 고려하여 표현하면 그 특성을 파악하기가 편리한데, 토로이달 기하구조에서는 다음과 같이 정의된다[19].

$$\mathbf{E}_\perp = E_+ \hat{e}_+ + E_- \hat{e}_- \quad (28)$$

$$\hat{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{\pm i\tau} (\hat{e}_\psi \mp i\hat{e}_\eta) \} \quad (29)$$

$$E_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{\mp i\tau} (E_\psi \pm iE_\eta) \} \quad (30)$$

여기서,

$$\begin{aligned} e^{\pm i\tau} &= \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} \pm i \cos \Theta \frac{\partial R}{\partial \theta} \right) \\ \kappa &= \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)^2 + \cos^2 \Theta \left(\frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2} \end{aligned}$$

이다. 전형적인 fast wave에서는 우수 편광(right-handed polarized) 전장(E_-)이 좌수 편광(left-handed polarized) 전장(E_+)보다 훨씬 큰 값을 갖는다.

2.5 미분연산자의 표현

Weak-variational formulation을 파동방정식에 적용할 경우, 1차의 미분연산자만이 사용되는 장점이 있다. 이러한 미분연산자 중에서 gradient와 curl을 PICES 코드의 자속 좌표계와 벡터에 대한 Stix 좌표계 성분을 사용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\nabla f = \hat{e}_\psi \nabla_\psi f + \hat{e}_\eta \nabla_\eta f + \hat{e}_b \nabla_b f \quad (31)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \nabla_\psi &= \frac{N_\chi}{J} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{G}{N_\chi^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ \nabla_\eta &= \frac{1}{N_\chi} \cos \Theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \nabla_b &= \frac{1}{N_\chi} \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \cos \Theta \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{E})_\psi &= \gamma_{\psi\psi} E_\psi - (\nabla_b E_\eta + \gamma_{\psi\eta} E_\eta) + (\nabla_\eta E_b + \gamma_{\psi b} E_b) \\
(\nabla \times \mathbf{E})_\eta &= (\nabla_b E_\psi + \gamma_{\eta\psi} E_\psi) + \gamma_{\eta\eta} E_\eta - (\nabla_\psi E_b + \gamma_{\eta b} E_b) \\
(\nabla \times \mathbf{E})_b &= -(\nabla_\eta E_\psi + \gamma_{b\psi} E_\psi) + (\nabla_\psi E_\eta + \gamma_{b\eta} E_\eta) + \gamma_{bb} E_b
\end{aligned} \tag{32}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
\gamma_{\psi\psi} &= 0 \\
\gamma_{\psi\eta} &= \frac{1}{N_\chi} \left(\sin \Theta \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} + \cos \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \\
\gamma_{\psi b} &= \frac{1}{N_\chi} \left(\cos \Theta \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta} - \sin \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \\
\gamma_{\eta\psi} &= \frac{\sin \Theta}{N_\chi} t_0 \\
\gamma_{\eta\eta} &= \frac{N_\chi}{J} \{ \cos \Theta \sin \Theta (t_2 - t_1) + t_3 \} \\
\gamma_{\eta b} &= \frac{N_\chi}{J} \{ \cos^2 \Theta t_2 + \sin^2 \Theta t_1 \} \\
\gamma_{b\psi} &= \frac{\cos \Theta}{N_\chi} t_0 \\
\gamma_{b\eta} &= \frac{N_\chi}{J} \{ \cos^2 \Theta t_1 + \sin^2 \Theta t_2 \} \\
\gamma_{bb} &= \frac{N_\chi}{J} \{ \cos \Theta \sin \Theta (t_1 - t_2) + t_3 \}
\end{aligned}$$

또,

$$\begin{aligned}
t_0 &= \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial \theta} - \frac{1}{N_\chi} \frac{\partial N_\chi}{\partial \theta} \\
t_1 &= \frac{1}{N_\chi} \left(\frac{\partial N_\chi}{\partial \rho} - \frac{G}{N_\chi^2} \frac{\partial N_\chi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{G}{N_\chi^2} \right) \\
t_2 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial \rho} - \frac{G}{N_\chi^2} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right) \\
t_3 &= \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \rho} - \frac{G}{N_\chi^2} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}$$

로 정의되었다.

2.6 자속 좌표계의 선택

자속 좌표계의 세 성분 (ρ, θ, ζ) 를 선택하는데는 여러가지 방법이 있을 수 있다. 앞에서 ζ 는 원통 좌표계에서의 기하학적인 방위각 ϕ 와 일치시켰다. θ 는 MHD 안정성 연구를 위해서라면 $\theta - \zeta$ 평면에서 자장이 일직선이 되도록 선택해야 하겠지만, 이 연구에서는 단순히 폴로이달 방향의 기하학적인 방위각으로 선택하였다.

$$\tan \theta = \frac{Z - Z_{axis}}{R - R_{axis}} \tag{33}$$

임의의 단조증가 자속함수인 ρ 는 자기축에서부터의 거리 r 을 이용하여 다음과 같이 정의되었다.

$$r = r(\psi, \theta) = \sqrt{(R - R_{axis})^2 + (Z - Z_{axis})^2} \quad (34)$$

$$\rho = r(\psi, \theta = 0) \quad (35)$$

따라서, Jacobian 과 metric은 다음과 같이 계산되어질 수 있다.

$$J = r \frac{\partial r}{\partial \rho}$$

$$N_x = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \theta} \right)^2 + r^2}$$

$$G = \frac{\partial r}{\partial \rho} \frac{\partial r}{\partial \theta}$$

제 3 절 플라즈마 모형

3.1 Hot 플라즈마 유전텐서(dielectric tensor)

z 방향의 자장 \mathbf{B} 에 의해 자화되고 Maxwellian 분포를 가지는 무한 균일 플라즈마 내에서, 파수벡터 $\mathbf{k} = (k_{\perp}, 0, k_{\parallel})$ 과 각 주파수 ω 를 가지고 진행하는 전자장에 대한 hot 플라즈마 유전텐서 \mathbf{K} 는 다음과 같이 주어진다[7].

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} + \sum_j \left(\frac{\omega_{pj}}{\omega} \right)^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \zeta_{0j} Z_{lj} e^{-b_j} \mathbf{X}_{lj} + \sum_j \left(\frac{\omega_{pj}}{\omega} \right)^2 2\zeta_{0j}^2 \mathbf{L} \quad (36)$$

여기에서 사용된 텐서들은

$$\mathbf{X}_{lj} = \begin{pmatrix} l^2 I_{lj}/b_j & il(I'_{lj} - I_{lj}) & -2^{1/2} \zeta_{lj}(l/\alpha_j) I_{lj} \\ -il(I'_{lj} - I_{lj}) & l^2 I_{lj}/b_j - 2b_j(I'_{lj} - I_{lj}) & i2^{1/2} \zeta_{lj} \alpha_j (I'_{lj} - I_{lj}) \\ -2^{1/2} \zeta_{lj}(l/\alpha_j) I_{lj} & -i2^{1/2} \zeta_{lj} \alpha_j (I'_{lj} - I_{lj}) & 2\zeta_{lj}^2 I_{lj} \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

로 정의되었고, 사용되는 각종 기호들은 다음과 같이 요약된다.

1. j 에 대한 첨자는 플라즈마의 모든 이온종과 전자에 대한 것이다.

$$j = \begin{cases} e, \\ i, \end{cases}$$

2. 모든 기호들은 특별한 언급이 없는 한 일반적인 정의를 따른다.

$$\begin{aligned} \Omega_j &= q_j B / m_j = \begin{cases} -eB/m_e < 0, & : \text{싸이클로트론 주파수,} \\ ZeB/m_i > 0, & \end{cases} \\ \omega_{pj} &= (n_j q_j^2 / \epsilon_0 m_j)^{1/2} : \text{플라즈마 주파수,} \\ v_{tj} &= (2T_j / m_j)^{1/2} : \text{열속도,} \\ \zeta_{lj} &= (\omega - l\Omega_j) / k_{\parallel} v_{tj} : l = \text{정수,} \\ Z_{lj} &= Z(\zeta_{lj}) : \text{플라즈마 분산 함수.} \\ \alpha_j &= -k_{\perp} \rho_j / \sqrt{2}, \\ b_j &= k_{\perp}^2 \rho_j^2 / 2 = \alpha_j^2, \\ \rho_j &= v_{tj} / |\Omega_j| : \text{선회 반경,} \\ I_{lj} &= I_l(b_j) : l\text{차의 제1종 변형 베셀 함수.} \end{aligned}$$

3. 단위계로는 MKSA system이 사용된다.

$$\begin{aligned}
[k_{\perp}, k_{\parallel}] &= [1/m] \\
[\omega, \omega_{pj}, \Omega_j] &= [\text{Hz}] \\
[n_j] &= [\#/m^3] \\
[q_j] &= [\text{C}] \\
[m_j] &= [\text{kg}] \\
[B] &= [\text{T}] \\
[T_j] &= [\text{J}] \\
[v_{tj}] &= [\text{m/s}] \\
[\rho_j] &= [\text{m}]
\end{aligned}$$

3.2 ICRF에서의 근사

Hot 플라즈마 유전텐서는, ICRF에서 전자나 이온의 선회반경이 fast wave의 파장에 비해 매우 작다는 것을 이용하여, 선회반경의 2차항까지 전개시켜 단순화시킬 수 있다[5, 7]. 따라서, K는

$$K = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ -K_{xy} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{xz} & -K_{yz} & K_{zz} \end{pmatrix}, \quad (38)$$

여기서,

$$K_{xx} = \left[1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 \zeta_{0j}}{\omega^2} (Z_{1j} + Z_{-1j}) \right] - n_{\perp}^2 \left[\sum_j \frac{v_{tj}^2 \omega_{pj}^2 \zeta_{0j}}{c^2 \Omega_j^2} \frac{1}{4} (Z_{1j} + Z_{-1j} - Z_{2j} - Z_{-2j}) \right], \quad (39)$$

$$K_{xy} = \left[i \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 \zeta_{0j}}{\omega^2} (Z_{1j} - Z_{-1j}) \right] - n_{\perp}^2 \left[i \sum_j \frac{v_{tj}^2 \omega_{pj}^2 \zeta_{0j}}{c^2 \Omega_j^2} \frac{1}{4} (2Z_{1j} - 2Z_{-1j} - Z_{2j} + Z_{-2j}) \right], \quad (40)$$

$$K_{xz} = n_{\perp} \left[\sum_j \frac{v_{tj} \omega_{pj}^2 \zeta_{0j}}{c \omega \Omega_j} \frac{1}{2} (\zeta_{1j} Z_{1j} - \zeta_{-1j} Z_{-1j}) \right], \quad (41)$$

$$K_{yy} = \left[1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 \zeta_{0j}}{\omega^2} (Z_{1j} + Z_{-1j}) \right] - n_{\perp}^2 \left[\sum_j \frac{v_{tj}^2 \omega_{pj}^2 \zeta_{0j}}{c^2 \Omega_j^2} \frac{1}{4} (-4Z_{0j} + 3Z_{1j} + 3Z_{-1j} - Z_{2j} - Z_{-2j}) \right], \quad (42)$$

$$K_{yz} = n_{\perp} \left[i \sum_j \frac{v_{tj} \omega_{pj}^2 \zeta_{0j}}{c \omega \Omega_j} \frac{1}{2} (2\zeta_{0j} Z_{0j} - \zeta_{1j} Z_{1j} - \zeta_{-1j} Z_{-1j}) \right], \quad (43)$$

$$K_{zz} = \left[1 + \sum_j \frac{2\omega_{pj}^2}{\omega^2} \zeta_{0j}^2 (1 + \zeta_{0j} Z_{0j}) \right] - n_{\perp}^2 \left[\sum_j \frac{v_{tj}^2 \omega_{pj}^2 \zeta_{0j}}{c^2 \Omega_j^2} \frac{1}{2} (2\zeta_{0j}^2 Z_{0j} - \zeta_{1j}^2 Z_{1j} - \zeta_{-1j}^2 Z_{-1j}) \right]. \quad (44)$$

로 표현된다. 전개에 사용된 무차원 변수는

$$b = k_{\perp}^2 \rho^2 / 2 = \alpha^2 \ll 1$$

이고, 다음의 몇 가지 제1종 변형 베셀 함수의 성질을 이용하였다.

$$I_l(b) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!(s+l)!} \left(\frac{b}{2}\right)^{2s+l}$$

$$I_l(b) = I_{-l}(b)$$

$$I'_l(b) = \frac{1}{2} \{ I_{l-1}(b) + I_{l+1}(b) \}$$

3.3 FWCD 모사를 위한 단순화

선회 반경에 대해 2차항까지 전개시킨 hot 플라즈마 유전텐서를, FWCD 모사에 편리하도록 좀 더 단순화 시켰다. 유전텐서의 0차항은 전자와 이온에 대하여 모두 그대로 남겨두고, 1,2차항은 에너지 흡수에 영향을 미치는 항만을 남겨두었다. 즉, 전자에 대해서는 ELD, TTMP, 그리고 두 기작의 간섭효과인 cross 항을 고려하였고, 이온에 대해서는 2차 이온 공명 항을 고려하였다. 또, ICRF에서

$$\zeta_{\pm 1e} Z_{\pm 1e} \approx -1$$

$$|Z_{zz}| \gg |n_{\perp}^2|$$

임을 이용하면, 최종적으로 FWCD 모사에 사용되는 유전텐서를 다음과 같이 얻는다.

$$K_{xx} = \left[1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \frac{\zeta_{0j}}{2} (Z_{1j} + Z_{-1j}) \right] + n_{\perp}^2 \left[\sum_{j=i} \frac{v_{tj}^2}{c^2} \frac{\omega_{pj}^2}{\Omega_j^2} \frac{\zeta_{0j}}{4} Z_{2j} \right], \quad (45)$$

$$K_{xy} = \left[i \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \frac{\zeta_{0j}}{2} (Z_{1j} - Z_{-1j}) \right] + n_{\perp}^2 \left[i \sum_{j=i} \frac{v_{tj}^2}{c^2} \frac{\omega_{pj}^2}{\Omega_j^2} \frac{\zeta_{0j}}{4} Z_{2j} \right], \quad (46)$$

$$K_{xz} = 0, \quad (47)$$

$$K_{yy} = \left[1 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \frac{\zeta_{0j}}{2} (Z_{1j} + Z_{-1j}) \right] + n_{\perp}^2 \left[\sum_{j=i} \frac{v_{tj}^2}{c^2} \frac{\omega_{pj}^2}{\Omega_j^2} \frac{\zeta_{0j}}{4} Z_{2j} \right] + n_{\perp}^2 \left[\frac{v_{te}^2}{c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\Omega_e^2} \zeta_{0e} Z_{0e} \right], \quad (48)$$

$$K_{yz} = n_{\perp} \left[i \frac{v_{te}}{c} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \Omega_e} \zeta_{0e} (1 + \zeta_{0e} Z_{0e}) \right], \quad (49)$$

$$K_{zz} = \left[1 + \sum_j \frac{2\omega_{pj}^2}{\omega^2} \zeta_{0j}^2 (1 + \zeta_{0j} Z_{0j}) \right]. \quad (50)$$

토카막 경계영역의 Faraday screen 밖에서는 cold 플라즈마 모형을 사용하는데, 식 (20)-(25)에서 $T_j \rightarrow 0$ 으로 보내면 cold 플라즈마 유전텐서를 얻는다.

$$K_{xx} = 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \Omega_j^2} \equiv S, \quad (51)$$

$$K_{xy} = -i \sum_j \frac{\Omega_j \omega_{pj}^2}{\omega(\omega^2 - \Omega_j^2)} \equiv -iD, \quad (52)$$

$$K_{xz} = 0, \quad (53)$$

$$K_{yy} = K_{xx} \quad (54)$$

$$K_{yz} = 0, \quad (55)$$

$$K_{zz} = 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \equiv P. \quad (56)$$

완전한 진공이라면 $n_j \rightarrow 0$ 이므로,

$$K_{xx} = K_{yy} = K_{zz} = 1, \quad K_{xy} = K_{xz} = K_{yz} = 0$$

이 된다.

3.4 분산관계식

무한 균일 플라즈마에서 전자장 $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ 의 의존성을 갖는다고 가정하면, Maxwell 방정식은

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (57)$$

으로 표현된다. 여기서,

$$\mathbf{n} = (n_{\perp}, 0, n_{\parallel}) = (ck_{\perp}/\omega, 0, ck_{\parallel}/\omega)$$

로 정의된 굴절을 벡터이다. 윗 식이 물리적으로 의미있는 해를 가지려면 아래의 분산관계식을 만족해야 한다.

$$\begin{vmatrix} K_{xx}^{(0)} + n_{\perp}^2 K_{xx}^{(2)} - n_{\parallel}^2 & K_{xy}^{(0)} + n_{\perp}^2 K_{xy}^{(2)} & n_{\perp} n_{\parallel} \\ -K_{xy}^{(0)} - n_{\perp}^2 K_{xy}^{(2)} & K_{yy}^{(0)} + n_{\perp}^2 K_{yy}^{(2)} - n_{\perp}^2 - n_{\parallel}^2 & n_{\perp} K_{yz}^{(1)} \\ n_{\perp} n_{\parallel} & -n_{\perp} K_{yz}^{(1)} & K_{zz}^{(0)} - n_{\perp}^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (58)$$

유전텐서에 쓰인 첨자는 선회반경에 대한 차수를 의미한다. ICRF에서 $|K_{zz}^{(0)}| \gg |n_{\perp}^2|$ 인 것을 이용하고, ω 와 n_{\parallel} 은 이미 주어졌다고 가정하면, 분산관계식은 n_{\perp}^2 에 관한 2차식으로 귀착된다.

$$An_{\perp}^4 + Bn_{\perp}^2 + C = 0 \quad (59)$$

여기서

$$\begin{aligned} A &= K_{zz}^{(0)} K_{xx}^{(2)} (K_{yy}^{(2)} - 1) + K_{zz}^{(0)} K_{xy}^{(2)2} + K_{yz}^{(1)2} K_{xx}^{(2)} + K_{yz}^{(1)} n_{\parallel} K_{xy}^{(2)} + n_{\parallel} K_{yz}^{(1)} K_{xy}^{(2)} - n_{\parallel}^2 (K_{yy}^{(2)} - 1) \\ B &= K_{zz}^{(0)} (K_{xx}^{(0)} - n_{\parallel}^2) (K_{yy}^{(2)} - 1) + K_{zz}^{(0)} K_{xx}^{(2)} (K_{yy}^{(0)} - n_{\parallel}^2) + 2K_{zz}^{(0)} K_{xy}^{(0)} K_{xy}^{(2)} \\ &\quad + K_{yz}^{(1)2} (K_{xx}^{(0)} - n_{\parallel}^2) + K_{yz}^{(1)} n_{\parallel} K_{xy}^{(0)} + n_{\parallel} K_{yz}^{(1)} K_{xy}^{(0)} - n_{\parallel}^2 (K_{yy}^{(0)} - n_{\parallel}^2) \\ C &= K_{zz}^{(0)} (K_{xx}^{(0)} - n_{\parallel}^2) (K_{yy}^{(0)} - n_{\parallel}^2) + K_{zz}^{(0)} K_{xy}^{(0)2} \end{aligned}$$

이다. n_{\perp}^2 에 관한 2개의 근중에서 그 크기가 작은 쪽은 fast wave에 해당하고, 그 크기가 큰 쪽은 ion Bernstein wave에 해당한다. Slow wave는 $|K_{zz}^{(0)}| \gg |n_{\perp}^2|$ 라는 가정을 통해 이미 제거되었다.

3.5 고차 이온 공명에 대한 보정

유전텐서와 분산관계식을 계산함에 있어서 선회반경의 2차항까지만 고려했기 때문에, $l \geq 3$ 인 고차 이온 공명은 이 플라즈마 모형에 포함되어 있지 않다. 그러나 동작 주파수가 높거나, NBI에 의해 발생된

고에너지 이온이 있을 경우에는 고차 이온 공명이 fast wave의 전파와 흡수에 영향을 미칠 수 있기 때문에 다음과 같은 보정항을 유전텐서에 추가하였다[16, 26].

$$K_{xx}^{l \geq 3} = \sum_{j=i} \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \zeta_{0j} Z_{lj} \left(\frac{l^2}{l! 2^l} \right) b_j^{l-1} \quad (60)$$

$$K_{xy}^{l \geq 3} = i K_{xx}^{l \geq 3} \quad (61)$$

$$K_{yy}^{l \geq 3} = K_{xx}^{l \geq 3} \quad (62)$$

3.6 플라즈마 분산 함수

유전텐서의 계산에 쓰이는 플라즈마 분산 함수는 Fried-Conte 함수라고도 불리는 균일 플라즈마에서의 플라즈마 분산 함수이다[6, 7]. 이 연구에서 ζ 는 실수이므로, 아래의 급수전개와 점근전개를 이용하면, 플라즈마 분산 함수의 실수부와 허수부가 쉽게 계산된다.

$$Z(\zeta) = i\sqrt{\pi} \text{sgn}(k_{\parallel}) \exp(-\zeta^2) - \zeta \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\zeta^2)^s \sqrt{\pi}}{\Gamma(s+3/2)} : \zeta \leq 4 \quad (63)$$

$$Z(\zeta) = i\sqrt{\pi} \text{sgn}(k_{\parallel}) \exp(-\zeta^2) - \frac{1}{\zeta} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+1/2)}{(\zeta^2)^s \sqrt{\pi}} : \zeta > 4 \quad (64)$$

제 4 절 Fast wave 파동방정식의 유도

4.1 파동방정식과 유전텐서의 결합

계수축 약법을 이용하여 비균일 hot 플라즈마 내에서 fast wave의 전파와 흡수를 기술하는 파동방정식을 유도하기 위한 첫 단계로 다음과 같은 형태의 파동방정식을 가정하자[14].

$$\int dk_{\parallel} \left[\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}; k_{\parallel}) - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{K}'(\mathbf{r}; \mathbf{k}_{\perp}, k_{\parallel}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}; k_{\parallel}) \right] = i\omega\mu_0 \int dk_{\parallel} \mathbf{J}_a(\mathbf{r}; k_{\parallel}), \quad (65)$$

여기서, ω 는 fast wave의 각주파수, \mathbf{J}_a 는 fast wave를 발진시키는 안테나의 전류 밀도이다. 전장과 전류 밀도는 시간에 대해 $e^{-i\omega t}$ 의 의존성을 갖는다고 가정하였고, ω 는 안테나에서 정해지면 매질 내에서는 일정한 상수이다. Fast wave 전장은 다음과 같은 단계를 거쳐 Fourier 성분으로 쓰여졌다.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}] \quad (66)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int dk_{\parallel} \mathbf{E}(\mathbf{r}; k_{\parallel}) \quad (67)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}; k_{\parallel}) = \mathbf{E}^{k_{\parallel}}(\mathbf{r}_{\perp}) e^{ik_{\parallel} r_{\parallel}} \quad (68)$$

플라즈마의 비균일한 정도는 약한것으로 간주되었고, 전장에 대한 플라즈마의 유전적(dielectric) 반응은 공간적으로 local하다고 가정하였다[16]. Hot 플라즈마 유전텐서는 Stix 좌표계 ($\hat{e}_{\psi}, \hat{e}_{\eta}, \hat{e}_b$)에서

$$\mathbf{K}'(\mathbf{r}; \mathbf{k}_{\perp}, k_{\parallel}) = \mathbf{R}^{-1}(\alpha) \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}; \mathbf{k}_{\perp}, k_{\parallel}) \cdot \mathbf{R}(\alpha), \quad (69)$$

로 표현된다. 여기서 $\mathbf{K}(\mathbf{r}; \mathbf{k}_{\perp}, k_{\parallel})$ 는 3장에 소개된 균일 플라즈마에서의 hot 플라즈마 유전텐서로서, 플라즈마의 비균일성은 단순히 플라즈마 parameter들의 공간적인 의존성으로 반영되었다. $\mathbf{R}(\alpha)$ 는 Stix 좌표계에서 \hat{e}_b -축을 중심으로 각도 α 만큼의 회전변환을 나타내고, \hat{e}_{ψ} -축을 $\mathbf{k}_{\perp} = (k_{\perp} \cos \alpha, k_{\perp} \sin \alpha, 0)$ 과 일치시키는 역할을 하며 다음과 같이 주어진다[6].

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

최종적으로 fast wave 파동방정식에 쓰이는 hot 플라즈마 유전텐서는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}' \cdot \mathbf{E} = & \begin{pmatrix} K_{xx}^{(0)} + n_{\perp}^2 K_{xx}^{(2)} & K_{xy}^{(0)} + n_{\perp}^2 K_{xy}^{(2)} \\ -K_{xy}^{(0)} - n_{\perp}^2 K_{xy}^{(2)} & K_{xx}^{(0)} + n_{\perp}^2 K_{xx}^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{\psi} \\ E_{\eta} \end{pmatrix} + K_{zz} E_b \hat{e}_b \\ & + ik_{\perp} \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{\psi} \\ E_{\eta} \\ E_b \end{pmatrix} \\ & + k_{\perp}^2 \gamma \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{\psi} \\ E_{\eta} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (70)$$

여기서, β 와 γ 는 표현의 편의를 위해 도입된 변수로서

$$K_{yz} = -ik_{\perp}\beta \quad (71)$$

$$K_{yy} - K_{xx} = k_{\perp}^2\gamma \quad (72)$$

에서부터 정의되었다. 전장 및 전류밀도, 유전텐서 등의 표현에 포함된 인자는 식의 간결함을 위해 생략하기로 한다. 앞의 hot 플라즈마 유전텐서에서 첫째 항은 ICRH에 주로 기여하고, 둘째 항은 ELD, 셋째 항은 ELD와 TTMP의 간섭효과, 네째 항은 TTMP의 효과를 각각 반영한다. Stix 좌표계에서 수직 파수 가

$$\mathbf{k}_{\perp} = (k_{\perp} \cos \alpha, k_{\perp} \sin \alpha, 0)$$

로 표현되는 것을 이용하면, 간섭효과 항과 TTMP 항을 다음과 같이 벡터형식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \beta ik_{\perp} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\cos \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{\psi} \\ E_{\eta} \\ E_b \end{pmatrix} &\rightarrow \beta(i\mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp}) + \beta(i\mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{E}_{\parallel}) \\ \gamma k_{\perp}^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{\psi} \\ E_{\eta} \end{pmatrix} &\rightarrow \gamma i\mathbf{k}_{\perp} \times (i\mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp}) \end{aligned}$$

따라서 원래의 파동방정식은 다음과 같이 변형된다.

$$\int dk_{\parallel} \left[\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \mathsf{K}_{\text{ICRH}} \cdot \mathbf{E}_{\perp} + K_{zz} \mathbf{E}_{\parallel} + \beta(i\mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp}) + \beta(i\mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{E}_{\parallel}) + \gamma(i\mathbf{k}_{\perp} \times (i\mathbf{k}_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp})) \right\} \right] = i\omega\mu_0 \int dk_{\parallel} \mathbf{J}_a. \quad (73)$$

여기서,

$$\mathsf{K}_{\text{ICRH}} \equiv \begin{pmatrix} K_{xx}^{(0)} + n_{\perp}^2 K_{xx}^{(2)} & K_{xy}^{(0)} + n_{\perp}^2 K_{xy}^{(2)} \\ -K_{xy}^{(0)} - n_{\perp}^2 K_{xy}^{(2)} & K_{xx}^{(0)} + n_{\perp}^2 K_{xx}^{(2)} \end{pmatrix}$$

로 정의하였다.

4.2 계수축약법의 적용

이제, Jaeger 등[17]의 방법에 따라 파동방정식에 계수축약법을 적용해 보자. 먼저 ICRH 항에 있는 n_{\perp}^2 을 분산관계식의 fast wave 근, $n_{\perp F}^2$ 으로 대체한다. Fast wave 근은 허수부도 포함하고 있기 때문에, 이온에 의한 에너지 흡수를 계산하는데 있어서 kinetic power flux의 영향을 제거하여 에너지 흡수량이 항상 'positive definite' 하려면, 다음과 같이 치환하는 것이 타당하다[26].

$$n_{\perp} \rightarrow \text{Re}(n_{\perp F}) \quad (74)$$

이 방법을 통해 파장이 짧은 ion Bernstein wave의 출현이 억제되어 수치적인 안정성을 확보할 수 있다. 그러나, 분산관계식은 \mathbf{k}_{\perp} 의 방향에 관하여는 아무런 정보를 주지 않기 때문에 전자에 대해서도 계수축약법을 적용하게되면 간섭효과 항과 TTMP 항이 원점 근처에서 특이성을 갖게 된다. 이러한 특이성을

방지하기 위해, 전자에 대해서는 계수축약법을 사용하지 않고 미분연산자를 사용하여 다음과 같이 치환한다.

$$i\mathbf{k}_\perp \rightarrow \nabla_\perp \equiv \nabla - ik_\parallel \hat{e}_b \quad (75)$$

이 방법은 결국 수직 파수 k_\perp 이 파동방정식에서 자기충족적으로 계산되어지는 것을 의미한다. 따라서, fast wave 파동방정식은

$$\int dk_\parallel \left[\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ K_{ICRH} \cdot \mathbf{E}_\perp + K_{zz} \mathbf{E}_\parallel + \beta(\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp)_\parallel + \beta(\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\parallel)_\perp \right\} + \gamma(\nabla_\perp \times (\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp))_\perp \right] = i\omega\mu_0 \int dk_\parallel \mathbf{J}_a. \quad (76)$$

로 쓸 수 있다.

4.3 Weak-variational formulation의 적용

위의 파동방정식을 weak-variational form으로 바꾸기 위해, $\mathbf{E}(\mathbf{r}; k'_\parallel)$ 의 함수공간에 속하는 임의의 벡터 시험함수 \mathbf{F} 를 도입한다. \mathbf{F} 가 \mathbf{E} 의 함수공간에 속한다는 말은 \mathbf{F} 가 \mathbf{E} 에 부여된 경계조건을 만족하면서, 적분이 의미를 갖도록 잘 정의되어 있다는 의미이다. \mathbf{F} 의 공액 복소수(conjugate)로 파동방정식에 내적을 취하고, 다시 플라즈마 체적에 대해 적분을 수행하면[19],

$$\begin{aligned} & \int dk_\parallel \int_V dV \left[(\nabla \times \mathbf{F})^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \mathbf{F}_\perp^* \cdot K_{ICRH} \cdot \mathbf{E}_\perp + \mathbf{F}_\parallel^* \cdot K_{zz} \mathbf{E}_\parallel \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\nabla_\perp \times \mathbf{F}_\perp)^*_\parallel \cdot \beta \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{F}_\parallel^* \cdot \beta(\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp)_\parallel + (\nabla_\perp \times \mathbf{F}_\perp)^*_\parallel \cdot \gamma(\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp)_\parallel \right\} \right] \\ &= \int dk_\parallel \oint_S \left[\mathbf{F}^* \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \mathbf{F}_\perp^* \times \beta \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{F}_\perp^* \times \gamma(\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp)_\parallel \right\} \right] \cdot d\mathbf{S} \\ & \quad + i\omega\mu_0 \int dk_\parallel \int_V dV \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{J}_a. \end{aligned} \quad (77)$$

을 얻는다. 윗 식을 유도하는데는 아래의 몇 가지 벡터 항등식이 사용되었다.

$$\mathbf{F}^* \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = (\nabla \times \mathbf{F})^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{F}^* \times (\nabla \times \mathbf{E}))$$

$$\mathbf{F}^* \cdot (\nabla_\perp \times \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla_\perp \times \mathbf{F})^* - \nabla \cdot (\mathbf{F}^* \times \mathbf{E})$$

위의 변분식은 유한요소법을 적용하여 수치적으로 풀기에 적합한 형태이고, 1차의 미분연산자만 요구된다. 또, 적분식의 형태이므로 에너지 보존을 자연히 만족시킨다.

4.4 토로이달 및 폴로이달 모드 전개

지금까지 k_\parallel 은 특별한 언급없이 연속적인 값으로 가정하였다. 그러나, 실제적인 토카막에서는 토로이달 방향의 주기성과 폴로이달 자장의 영향으로 k_\parallel 이 불연속적인 값이 되고, 공간적인 의존성도 갖게 된다. 이런 문제를 적절히 취급하기 위해, 전장을 토로이달 및 폴로이달 방향의 Fourier 모드로 급수전개한다. 자속좌표계 (ρ, θ, ζ) 를 사용하면 다음과 같다.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{m,n} \mathbf{E}^{m,n}(\rho) e^{i(m\theta+n\zeta)} \quad (78)$$

여기서, m 과 n 은 각각 폴로이달 모드, 토로이달 모드라고 부르는 정수이다. k_{\parallel} 에 대한 표현은 Fourier 변환에서의 대응관계,

$$ik_{\parallel}e^{i(m\theta+n\zeta)} \rightarrow (\hat{e}_b \cdot \nabla)e^{i(m\theta+n\zeta)}$$

와 자속좌표계에서의 gradient를 이용하여 다음과 같이 구해진다[18, 16]

$$k_{\parallel} \rightarrow k_{\parallel}^{m,n} = \frac{m}{N_x} \sin \Theta + \frac{n}{R} \cos \Theta, \quad (79)$$

따라서, 파동방정식의 표현 형식도 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} \int dk_{\parallel} &\rightarrow \sum_{m,n} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}; k_{\parallel}) &\rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}; m, n) = \mathbf{E}^{m,n}(\rho)e^{i(m\theta+n\zeta)} \\ \mathsf{K}(\mathbf{r}; k_{\perp}, k_{\parallel}) &\rightarrow \mathsf{K}(\mathbf{r}; k_{\perp}, m, n) \end{aligned}$$

파동방정식을 다루는데 있어서, 토로이달 모드 n 은 토카막의 축대칭성때문에 서로 독립적으로 취급할 수 있지만, 폴로이달 모드 m 은 유전텐서 및 미분연산자의 θ -의존성으로 인하여 반드시 결합된 형태로 취급해야 한다.

제 5 절 에너지 흡수 및 전류구동

5.1 에너지 보존식

변분식 형태의 파동방정식에서 벡터 시험함수를

$$\mathbf{F} = \sum_{m',n'} \mathbf{E}(\mathbf{r}; m', n')$$

로 택하면, 다음과 같은 에너지 보존식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{m',n'} \sum_{m,n} \int_V dV \left[(\nabla \times \mathbf{E}')^* \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \mathbf{E}'^* \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E}'_\perp^* \cdot (\mathbf{K}_{ICRH} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}'_\parallel^* \cdot (K_{zz} - 1) \mathbf{E}_\parallel \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\nabla_\perp \times \mathbf{E}'_\perp)_\parallel^* \cdot \beta \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}'_\parallel^* \cdot \beta (\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp)_\parallel + (\nabla_\perp \times \mathbf{E}'_\perp)_\parallel^* \cdot \gamma (\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp)_\parallel \right\} \right] \\ &= \sum_{m',n'} \sum_{m,n} \oint_S \left[\mathbf{E}'^* \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \mathbf{E}'_\perp^* \times \beta \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}'_\perp^* \times \gamma (\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp)_\parallel \right\} \right] \cdot d\mathbf{S} \\ & \quad + i\omega\mu_0 \sum_{m',n'} \sum_{m,n} \int_V dV \mathbf{E}'^* \cdot \mathbf{J}_a. \end{aligned} \quad (80)$$

여기서, \mathbf{E}' 은 $\mathbf{E}(\mathbf{r}; m', n')$ 을 나타낸다. 윗 식에서 좌변의 각 항은 자장 에너지, 전장 에너지, 사이클로트론 공명에 의한 에너지 흡수, LD에 의한 에너지 흡수, ELD와 TTMP의 간섭 효과, TTMP에 의한 에너지 흡수를 나타내고, 우변의 각 항은 Poynting flux, kinetic power flux, 안테나 출력을 의미한다. 적분의 경계를 플라즈마를 둘러싸고 있는 완전 도체벽으로 잡으면, Poynting flux와 kinetic power flux에 의한 기여는 무시된다. 토로이달 방향의 축대칭성으로 인해, $n = n'$ 인 경우에만 실제적으로 체적적분에 기여가 생기므로, 에너지 흡수율을 계산하는데 있어서 $n = n'$ 인 경우만 고려한다. 따라서, 실출력에 대한 에너지 보존식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_n \sum_{m',m} \int_V dV \left[\frac{\epsilon_0\omega}{2} \text{Im} \left\{ \mathbf{E}'_\perp^* \cdot (\mathbf{K}_{ICRH} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}'_\parallel^* \cdot (K_{zz} - 1) \mathbf{E}_\parallel \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\nabla_\perp \times \mathbf{E}'_\perp)_\parallel^* \cdot \beta \mathbf{E}_\parallel + \mathbf{E}'_\parallel^* \cdot \beta (\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp)_\parallel + (\nabla_\perp \times \mathbf{E}'_\perp)_\parallel^* \cdot \gamma (\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp)_\parallel \right\} \right] \\ &= \sum_n \sum_{m',m} \int_V dV \left[-\frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}'^* \cdot \mathbf{J}_a \} \right] \end{aligned} \quad (81)$$

5.2 이온에 의한 에너지 흡수율

이온에 의한 에너지 흡수는 싸이클로트론 공명을 통해 일어난다. 전자에 의한 싸이클로트론 공명은 ICRF에서 무시되므로, 이온에 의한 에너지 흡수율(단위 시간당 평균적으로 흡수되는 에너지)은 파동방정식의 유도과정에서 도입된 \mathbf{K}_{ICRH} 를 사용하여 주어진 (m, n) 모드에 대해 다음과 같이 표현된다.

$$P_i(m, n) = \sum_{m'} \int_V dV \left[\frac{\epsilon_0\omega}{2} \text{Im} \left\{ \mathbf{E}'_\perp^* \cdot (\mathbf{K}_{ICRH} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}_\perp \right\} \right] \quad (82)$$

에너지 흡수율로부터 단위체적당의 에너지 흡수율을 정의하는데에는 약간의 주의가 필요하다. 토로이달 방향으로의 불균일성으로 인해 발생하는 (m, m') 모드 사이의 결합이 물리적으로 의미없는 항을 만들

수 있기 때문이다. 이러한 항들은 폴로이달 방위각에 대한 적분을 통하여 대부분 제거되므로, 다음과 같은 형태로 단위체적당의 에너지 흡수율을 정의하는 것이 타당하다[19, 20].

$$\begin{aligned} P_i(\rho, \theta; m, n) &\simeq \frac{\epsilon_0 \omega}{2} \operatorname{Re} \sum_{m'} e^{i(m-m')\theta} \left[E_\psi^{m'*} \operatorname{Im} K_{xx} E_\psi^m + E_\eta^{m'*} \operatorname{Im} K_{xx} E_\eta^m \right] \\ &+ \frac{\epsilon_0 \omega}{2} \operatorname{Im} \sum_{m'} e^{i(m-m')\theta} \left[E_\psi^{m'*} \operatorname{Re} K_{xy} E_\eta^m - E_\eta^{m'*} \operatorname{Re} K_{xy} E_\psi^m \right] \end{aligned} \quad (83)$$

우변에서 토로이달 모드에 대한 첨자 n 은 편의상 생략하기로 한다.

5.3 전자에 의한 에너지 흡수율

전자에 의한 에너지 흡수는 ELD와 TTMP를 통해 일어난다. 이온에 의한 LD는 ICRF에서 무시되므로, K_{zz} 는 ELD의 효과만 나타낸다고 보아도 무방하다. 따라서 전자에 의한 에너지 흡수율은 주어진 (m, n) 모드에 대해 아래의 세 항으로 표현된다.

$$P_{\text{ELD}}(m, n) = \sum_{m'} \int_V dV \left[\frac{\epsilon_0 \omega}{2} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{E}'_{\parallel}^* \cdot (K_{zz} - 1) \mathbf{E}_{\parallel} \right\} \right] \quad (84)$$

$$P_{\text{cross}}(m, n) = \sum_{m'} \int_V dV \left[\frac{\epsilon_0 \omega}{2} \operatorname{Im} \left\{ (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}'_{\perp})_{\parallel}^* \cdot \beta \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\parallel}^* \cdot \beta (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp})_{\parallel} \right\} \right] \quad (85)$$

$$P_{\text{TTMP}}(m, n) = \sum_{m'} \int_V dV \left[\frac{\epsilon_0 \omega}{2} \operatorname{Im} \left\{ (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}'_{\perp})_{\parallel}^* \cdot \gamma (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp})_{\parallel} \right\} \right] \quad (86)$$

앞에서 이온에 대한 단위체적당의 에너지 흡수율을 정의했던 것처럼, 전자에 대해서도 다음과 같이 단위체적당의 에너지 흡수율을 정의한다.

$$P_{\text{ELD}}(\rho, \theta; m, n) \simeq \frac{\epsilon_0 \omega}{2} \operatorname{Re} \sum_{m'} e^{i(m-m')\theta} \left[\mathbf{E}_{\parallel}^{m'*} \cdot \operatorname{Im} K_{zz} \mathbf{E}_{\parallel}^m \right] \quad (87)$$

$$P_{\text{cross}}(\rho, \theta; m, n) \simeq \frac{\epsilon_0 \omega}{2} \operatorname{Re} \sum_{m'} e^{i(m-m')\theta} \left[(\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp})_{\parallel}^{m'*} \cdot \operatorname{Im} \beta \mathbf{E}_{\parallel}^m + \mathbf{E}_{\parallel}^{m'*} \cdot \operatorname{Im} \beta (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp})_{\parallel}^m \right] \quad (88)$$

$$P_{\text{TTMP}}(\rho, \theta; m, n) \simeq \frac{\epsilon_0 \omega}{2} \operatorname{Re} \sum_{m'} e^{i(m-m')\theta} \left[(\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp})_{\parallel}^{m'*} \cdot \operatorname{Im} \gamma (\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp})_{\parallel}^m \right] \quad (89)$$

따라서,

$$P_e(\rho, \theta; m, n) = P_{\text{ELD}}(\rho, \theta; m, n) + P_{\text{cross}}(\rho, \theta; m, n) + P_{\text{TTMP}}(\rho, \theta; m, n) \quad (90)$$

이 되고, 이러한 정의는 fast wave에 의해 구동되는 전류를 계산하는데 있어서 (m, m') 모드 사이의 결합을 옳바르게 반영하도록 해준다[20]. 실제로 윗 식을 적용하는데 있어서는 유전텐서 부분이 m 의 의존성을 갖는다는 것을 주의해야 한다.

5.4 전류구동 효율

Fast wave에 의해 구동되는 전류밀도는 다음과 같은 형태로 계산된다[20].

$$J_{\parallel}(\rho, \theta) = \sum_n \sum_m \eta(\rho, \theta; m, n) P_e(\rho, \theta; m, n) \quad (91)$$

여기서, η 는 Ehst와 Karney의 전류구동 효율에 관한 수치적 실험식[11]으로서, 다음과 같이 주어진다.

$$\eta(\rho, \theta; m, n) = \text{sgn}(-k_{\parallel}^{m,n}) \left[\frac{19.19 \times 10^{15}}{\ln \Lambda} \frac{T_e/e}{n_e} \right] \frac{\tilde{j}_{\parallel}}{\tilde{p}_{RF}} \quad (92)$$

Ehst와 Karney의 실험식에서 $k_{\parallel}^{m,n}$ 은 항상 양수로 취급되었는데, 실제 안테나 파수스펙트럼에서 $k_{\parallel}^{m,n}$ 은 양수, 음수 모두를 가지므로, 절대값을 취해서 $|k_{\parallel}^{m,n}|$ 를 실험식에 대입하고, 발생되는 전류의 방향은 $\text{sgn}(-k_{\parallel}^{m,n})$ 에서 결정하도록 하였다. 정규화된 전류구동 효율은

$$\frac{\tilde{j}_{\parallel}}{\tilde{p}_{RF}} = CM\eta_0 R \quad (93)$$

로 표현되며, 사용된 매개함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C &= 1 - \exp[-(cy_t)^m] \\ M &= 1 + a \left(\frac{\lambda_t}{w} \right)^3 \\ \eta_0 &= \frac{K}{w} + D + \frac{8w^2}{5 + Z_{eff}} \\ R &= 1 - \epsilon^n \frac{\sqrt{x_r^2 + w^2}}{\epsilon^n x_r + w} \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} y_t &= (1 - \lambda_t^2) \frac{w^2}{\lambda_t^2} \\ \lambda_t &= \sqrt{1 - \frac{B(\rho, \theta)}{B(\rho, \pi)}} \\ K &= 23.82 / (0.678 + Z_{eff}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 8.26 / Z_{eff}^{0.707} \\ w &= \sqrt{2} \frac{\omega / |k_{\parallel}^{m,n}|}{v_{te}} \end{aligned}$$

또, $v_{te}(= \sqrt{2T_e/m_e})$ 는 전자의 열속도, $\epsilon(= r/R_{axis})$ 는 역형상비, Z_{eff} 는 유효 전하수로서,

$$\begin{aligned} Z_{eff} &= \frac{\sum_i n_i Z_i^2}{n_e} \\ &= \frac{\sum_i n_i Z_i^2}{\sum_i n_i Z_i} \end{aligned}$$

로 정의되며, Coulomb logarithm은 전자-이온의 충돌이 지배적이고 $T > 10eV$ 인 경우에

$$\begin{aligned} \ln \Lambda &= 15.2 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{n_e}{10^{20}} \right) + \ln \left(\frac{T_e}{10^3 e} \right) \\ &\approx 17 - 18 \text{ for core in fusion reactor} \end{aligned}$$

로 표현된다. ELD와 TTMP가 동시에 나타나는 fast wave에 대한 실험식의 계수값들은 다음과 같다.

$$m = 2.48$$

$$x_r = 3.5$$

$$c = 0.0987$$

$$a = 12.3$$

$$n = 0.77$$

정규화된 전류구동 효율 이외에 체적 평균된 전류구동 효율이 정의될 수 있는데,

$$\gamma_{CD} \equiv \frac{I_{CD}[A]\bar{n}_e[10^{20}m^{-3}]R_0[m]}{P_{RF}[W]} \quad (94)$$

로 주어지며, 전반적인 전류구동의 성능을 가늠하는 척도이다. 여기서,

$$\begin{aligned} I_{CD} &= \int_A dA J_{\parallel}(\rho, \theta) \cos \Theta \\ \bar{n}_e &= \frac{\int_V dV n_e}{\int_V dV} \\ P_{RF} &= \sum_n \sum_{m',m} \int_V dV \left[-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}; m', n)^* \cdot \mathbf{J}_a(\mathbf{r}; m, n) \} \right] \end{aligned}$$

로 계산된다. 또 안테나에서 방출되는 RF 출력중에 전자로 흡수되는 비율도 상당히 중요한데,

$$A_e(\%) \equiv \frac{P_e}{P_{RF}} \times 100 \quad (95)$$

로 정의할 수 있고, 여기서

$$P_e = \sum_n \sum_m \int dV P_e(\rho, \theta; m, n)$$

이다. 최종적으로 계산된 전류밀도는 자속면에 대한 평균을 취하여 아래와 같이 나타낸다.

$$\langle J_{\parallel} \rangle (\rho) = \frac{\int_0^{2\pi} J_{\parallel}(\rho, \theta) R J d\theta}{\int_0^{2\pi} R J d\theta} \quad (96)$$

제 6 절 안테나 모형

6.1 표면 전류밀도

Fast wave를 발진시키는 안테나는 진공 중의 표면 전류로 가정한다. 전류밀도와 표면 전류밀도와의 등 가성, $\mathbf{J}_a dV = \mathbf{K}_a dS$ 를 이용하면,

$$\mathbf{J}_a(\mathbf{r}) = \frac{N_\chi}{J} K_a(\theta, \zeta) \delta(\rho - \rho_a) \hat{e}_a \quad (97)$$

을 얻는다[19]. 여기서, ρ_a 는 안테나가 자리잡고 있는 자속면을 가리킨다.

$$\hat{e}_a = \cos(\Theta - \alpha) \hat{e}_\eta + \sin(\Theta - \alpha) \hat{e}_b \quad (98)$$

는 폴로이달 방향으로부터 α 의 각도만큼 기울어진 안테나의 방향이다. Fast wave의 발진을 위해서는 자장과 수직하도록 전류를 흘려야 하므로, 보통 $\Theta = \alpha$ 으로 놓는다[19]. 또, 안테나 양끝의 전류공급 선(feeder)과 중심의 전류단락선(short)에서 발생되는 부반경방향의 전류는 무시하였다[18]. 표면 전류밀도가 다음과 같은 의존성을 갖는다고 가정하면,

$$K_a(\theta, \zeta) = I_0 f(\theta) g(\zeta) \quad (99)$$

각 함수는

$$f(0) = 1$$

$$\int_0^{2\pi} g(\zeta) R_T d\zeta = 1$$

로 정규화되어 있고, 따라서 I_0 는 $\theta = 0$ 에서의 총 전류이다.

$$\int K_a(0, \zeta) R_T d\zeta = I_0$$

여기서, R_T 는 안테나 중심의 주반경이고, I_0 의 값으로는 보통 1A를 가정하고 계산을 수행한다.

6.2 폴로이달 의존성

먼저, 안테나의 폴로이달 방향으로 벌어진 각도는 다음과 같이 근사된다.

$$\theta_0 \simeq \frac{L_P/2}{r_A} \quad (100)$$

여기서, L_P 는 안테나의 높이, r_A 는 안테나 중심의 부반경이다. 안테나 전류의 파형이 정상파의 형태로서, 중심의 $\theta = 0$ 인 전류단락점에서 최대를 이루고 양끝의 $\theta = \pm\theta_0$ 인 지점에서 전류공급선과 만난다면, $f(\theta)$ 를 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$f(\theta) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq \theta \leq \theta_0 \\ \cos(\kappa r_A \theta), & -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 \\ 0, & \theta_0 < \theta \leq \pi \end{cases} \quad (101)$$

여기서,

$$\kappa = \frac{k_0}{\beta}$$

로 정의되었고, $k_0 = \omega/c$ 는 진공에서의 파수이며, $\beta = v_{phase}/c$ 는 전파 상수(propagation constant)로서 안테나 설계에서 주어지는 값이다[10, 27]. 이제, $f(\theta)$ 를 폴로이달 모드로 급수전개하면,

$$f(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f^m e^{im\theta} \quad (102)$$

여기서,

$$\begin{aligned} f^m &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-im\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin\{(\kappa r_A - m)\theta_0\}}{2(\kappa r_A - m)} + \frac{\sin\{(\kappa r_A + m)\theta_0\}}{2(\kappa r_A + m)} \right] \end{aligned} \quad (103)$$

이다. 만일, 안테나 중심의 폴로이달 위치가 일반적인 각도 $\theta = \theta_A$ 로 주어진다면,

$$f^m \rightarrow e^{-im\theta_A} f^m$$

로 바꿔주면 된다.

6.3 토로이달 의존성

전류 분포가 토로이달 방향으로 Gaussian 형태라면, 주기성을 고려하여 다음과 같이 쓸 수 있다[13].

$$g(\zeta) = C \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{R_T^2}{L_T^2/4} (\zeta - 2\pi l)^2 \right] \quad (104)$$

여기서, L_T 는 안테나의 폭이며, C 는 $g(\zeta)$ 의 정규화로 부터 결정되는 상수로서,

$$C = \frac{1}{\sqrt{\pi} L_T / 2}$$

로 주어진다. 마찬가지로 $g(\zeta)$ 를 토로이달 모드로 급수전개하면,

$$g(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g^n e^{in\zeta} \quad (105)$$

여기서,

$$\begin{aligned} g^n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\zeta) e^{-in\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi R_T} \exp \left[-\frac{n^2 L_T^2}{16 R_T^2} \right] \end{aligned} \quad (106)$$

이다. 만일, 안테나 중심의 위치가 토로이달 방향으로 길이 w_d 만큼 이동했다면,

$$g^n \rightarrow e^{-in\frac{w_d}{R_T}} g^n$$

로 바꿔주면 된다.

6.4 배열인자(array factor)

표면 전류밀도에 시간적인 의존성 $e^{-i\omega t}$ 을 고려하면,

$$K_a(\theta, \zeta)e^{-i\omega t} = I_0 \sum_m f^m \sum_n g^n e^{i(n\zeta - \omega t)} \quad (107)$$

로 쓸 수 있다. 전류구동을 위해서는 시간적인 위상차를 가지는 여러개의 안테나를 토로이달 방향으로 배치하여 진행파를 형성해야 한다. 위상차를 $\Delta\phi$, 안테나 사이의 간격을 w_d 라 하고, $\zeta = 0$ 에서부터 $-\hat{e}_\zeta$ 방향으로 진행파를 형성시키고자 한다면, 표면 전류밀도는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} K_a(\theta, \zeta)e^{-i\omega t} &= I_0 \sum_m f^m \sum_n \left[g^n e^{i(n\zeta - \omega t)} + g^n e^{i(n\zeta - \omega t)} e^{-i(n\frac{w_d}{R_T} + \Delta\phi)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + g^n e^{i(n\zeta - \omega t)} e^{-i(N_A-1)(n\frac{w_d}{R_T} + \Delta\phi)} \right] \end{aligned} \quad (108)$$

여기서, N_A 는 안테나의 갯수이고, w_d 는 보통 $2L_T$ 로 설정한다. 따라서, 안테나 배열에 대한 표면 전류밀도는 시간적인 의존성을 생략하면

$$\begin{aligned} K_a(\theta, \zeta) &= \sum_{m,n} I_0 f^m g^n A(n) e^{i(m\theta + n\zeta)} \\ &= \sum_{m,n} K_a^{m,n} e^{i(m\theta + n\zeta)} \end{aligned}$$

로 나타낼 수 있고, 여기서, $A(n)$ 은

$$\begin{aligned} A(n) &= \sum_{p=0}^{N_A-1} \exp \left[-ip \left(n\frac{w_d}{R_T} + \Delta\phi \right) \right] \\ &= \frac{1 - \exp \left[-iN_A \left(n\frac{w_d}{R_T} + \Delta\phi \right) \right]}{1 - \exp \left[-i \left(n\frac{w_d}{R_T} + \Delta\phi \right) \right]} \end{aligned} \quad (109)$$

로 정의되는 배열인자이다[10, 28]. 토로이달 모드에 대한 안테나 출력의 스펙트럼 $P(n)$ 은 전류의 제곱에 비례하므로,

$$P(n) \propto |g^n|^2 |A(n)|^2$$

라 할 수 있고, 주로 배열인자에 의해 다음과 같이 그 형태가 결정된다.

$$P(n) \propto |A(n)|^2 = \frac{\sin^2 \left\{ \frac{N_A}{2} \left(n\frac{w_d}{R_T} + \Delta\phi \right) \right\}}{\sin^2 \left\{ \frac{1}{2} \left(n\frac{w_d}{R_T} + \Delta\phi \right) \right\}} \quad (110)$$

윗 식이 최대 또는 최소가 되는 곳은

$$n\frac{w_d}{R_T} + \Delta\phi = 2\pi p + 2\pi \frac{q}{N_A}, \quad p = , q = 0, 1, \dots, N_A - 1$$

이며,

$$|A(n)|^2 = \begin{cases} N_A^2, & q = 0 \\ 0, & q = 1, \dots, N_A - 1 \end{cases} \quad (111)$$

의 값을 갖는다. 최대값을 갖는 peak의 토로이달 모드 폭은,

$$\Delta n = \frac{4\pi}{N_A w_d / R_T}$$

이며, 최초의 peak에 해당하는 토로이달 모드는

$$n_{peak} = - \left[\frac{\Delta\phi}{w_d / R_T} \right]$$

이다. n 은 정수이기 때문에, 약간의 절단오차가 있을 수 있다. 한편, n 과 $\zeta_{0e} (= \omega/k_{\parallel} v_{te})$ 와의 관계를 구해 보면,

$$n \approx 0.335 \frac{R_0 f(MHz)}{\zeta_{0e} \sqrt{T_e(keV)}} \quad (112)$$

이다. 안테나의 파수 스펙트럼을 결정하는데 있어서, n_{peak} 근처에서 발진되는 모드가 토카막 중심부에서 최적화된 ζ_{0e} 값을 가지도록 하여야 전류구동 효율을 높일 수 있다.

6.5 안테나 출력 및 부하 저항

표면 전류밀도를 이용하여 안테나에서 방출되는 실출력을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$P_{RF} \simeq 4\pi^2 r_A R_T \sum_n -\frac{1}{2} \text{Re} \left[\sum_{m'} \left\{ E_{\eta}^{m'*}(\rho_a) \cos(\Theta - \alpha)_0 + E_b^{m'*}(\rho_a) \sin(\Theta - \alpha)_0 \right\} K_a^{m'} \right] \quad (113)$$

여기서, 기하학적 변수들은 그 풀로이달 의존성이 약하다고 가정하여 안테나 중심에서의 값을 사용하였다. 안테나 부하저항은 전류밀도가 풀로이달 의존성을 가지고 있기 때문에, 다음과 같이 단위길이에 대해서 정의된다[27].

$$P_{RF} = \frac{1}{2} N_A R' \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [I_0 f(\theta)]^2 r_A d\theta \quad (114)$$

따라서,

$$R' = \frac{1}{N_A} \frac{2P_{RF}}{I_0^2} \frac{1}{\left[r_A \theta_0 + \frac{\sin(2\kappa r_A \theta_0)}{2\kappa} \right]} \quad (115)$$

를 얻는다. R' 의 단위는 Ω/m 가 되고, 만일 전류밀도가 균일하다면($\kappa \rightarrow 0$),

$$R' = \frac{1}{N_A} \frac{2P_{RF}}{I_0^2} \frac{1}{L_P}$$

로 근사된다.

6.6 Faraday screen

Faraday screen은 경계 플라즈마와 안테나 사이의 직접적인 접촉에 의한 안테나의 손상을 막고, 플라즈마 내부에서 주로 fast wave만을 여기시킬 목적으로 RF 전장의 외부자장 방향 성분을 차단시키기 위해, 자장에 수직한 방향으로의 전도도는 0이고 자장과 나란한 방향으로는 전도도가 무한대인 비균등성 전도도의 평판으로 되어 있다[29]. 즉,

$$\hat{e}_F = -\sin(\Theta - \beta)\hat{e}_{\eta} + \cos(\Theta - \beta)\hat{e}_b \quad (116)$$

를 토로 이 달 방향으로부터 β 의 각도 만큼 기울어진 Faraday screen의 방향이라고 한다면,

$$\hat{e}_F \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

을 만족하게 된다. 보통 $\beta = \Theta$ 로 놓는다.

제 7 절 수치해법 및 경계조건

7.1 1차원 유한요소화

유한요소법을 적용하기 위해 과동방정식의 계산영역을 다음과 같이 유한요소로 나눈다.

$$\int_V dV \rightarrow \sum_e \int_{V_e} dV = \sum_e \int_{\rho_{e1}}^{\rho_{e2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R J d\rho d\theta d\zeta \quad (117)$$

앞으로는 특정 요소 e 가 주어졌다고 가정하고, 요소에 대한 첨자는 생략하기로 한다. 적분을 조직적으로 하기 위해 local 좌표계 ξ 를 도입한다.

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \rightarrow \int_{-1}^1 \mathcal{J} d\xi \quad (118)$$

여기서, \mathcal{J} 는 $\rho \rightarrow \xi$ 변환의 Jacobian으로서 ρ 좌표에 대해 선형보간을 하면 다음과 같이 정의된다.

$$\mathcal{J} \equiv \frac{d\rho}{d\xi} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} = \frac{h}{2} \quad (119)$$

이제, 특정 요소내에서 전장을 다음과 같이 표현하자.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}; m, n) &= \mathbf{E}^{m,n}(\rho) e^{i(m\theta+n\zeta)} \\ &= \sum_{j=1}^2 \sum_{v=1}^3 N_j(\xi) \hat{e}_v E_{jv}^{m,n} e^{i(m\theta+n\zeta)} \end{aligned} \quad (120)$$

여기서, j 는 절점(node) 번호이며, v 는 전장 벡터의 성분 ψ, η, b 를 가리킨다. $N_j(\xi)$ 는 요소내에서 정의되는 보간함수이다. 전장에 대해서도 선형보간을 이용할 경우, isoparametric formulation이 된다[30]. 시험함수로는 Galerkin법[30]을 이용하여 전장의 표현에 사용된 보간함수를 이용한다.

$$\mathbf{F} = N_i(\xi) \hat{e}_{v'} e^{i(m'\theta+n'\zeta)} \quad (121)$$

토로이달 방향의 대칭성으로 인해 $n = n'$ 만 적분에 기여하므로, 각각의 토로이달 모드는 서로 독립적이 된다. 따라서 특정 토로이달 모드 n 이 주어졌다고 가정하고, 토로이달 모드에 대한 첨자도 생략한다.

7.2 요소행렬의 표현

과동방정식에 유한요소법을 적용하면, 주어진 토로이달 모드 n 과 요소 e 에 대하여 다음과 같은 형식으로 요소행렬이 얻어질 것이다.

$$\sum_j \sum_m \sum_v \mathcal{K}(i, m', v'; j, m, v) E_{jv}^m = 0 \quad (122)$$

요소행렬 \mathcal{K} 를 각 항들이 주로 기여하는 물리적 기작에 따라 나눠 써보면 다음과 같다.

$$\mathcal{K}_{\text{vacuum}} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\theta} \left[(\nabla \times N_i \hat{e}_{v'})^{m'*} \cdot (\nabla \times N_j \hat{e}_v)^m \right] 2\pi R J \mathcal{J} d\theta d\xi \quad (123)$$

$$\mathcal{K}_{\text{ICRH}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\theta} [N_i \hat{e}_{v'\perp} \cdot \mathbf{K}_{\text{ICRH}}^m \cdot N_j \hat{e}_{v\perp}] 2\pi R J \mathcal{J} d\theta d\xi \quad (124)$$

$$\mathcal{K}_{\text{ELD}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\theta} [N_i \hat{e}_{v' \parallel} \cdot K_{zz}^m N_j \hat{e}_{v \parallel}] 2\pi R J \mathcal{J} d\theta d\xi \quad (125)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\text{cross}} = & -\frac{\omega^2}{c^2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\theta} [(\nabla_{\perp} \times N_i \hat{e}_{v' \perp})_{\parallel}^{m'*} \cdot \beta^m N_j \hat{e}_{v \parallel}] 2\pi R J \mathcal{J} d\theta d\xi \\ & -\frac{\omega^2}{c^2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\theta} [N_i \hat{e}_{v' \parallel} \cdot \beta^m (\nabla_{\perp} \times N_j \hat{e}_{v \perp})_{\parallel}^m] 2\pi R J \mathcal{J} d\theta d\xi \end{aligned} \quad (126)$$

$$\mathcal{K}_{\text{TTMP}} = -\frac{\omega^2}{c^2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\theta} [(\nabla_{\perp} \times N_i \hat{e}_{v' \perp})_{\parallel}^{m'*} \cdot \gamma^m (\nabla_{\perp} \times N_j \hat{e}_{v \perp})_{\parallel}^m] 2\pi R J \mathcal{J} d\theta d\xi \quad (127)$$

유전텐서의 풀로이달 모드에 대한 의존성을 분명히 하기 위해 첨자 m 을 표시하였다. 요소 행렬의 source 벡터는 안테나와 인접한 요소에서만 Poynting flux의 불연속으로 실질적인 기여가 생긴다. 원점과 벽면으로의 Poynting flux는 0이고, 나머지 절점에서는 인접한 요소에서 flux에 대한 면적분이 서로 상쇄되며 때문에 생략하였다.

7.3 Curl의 계산방법

요소행렬을 계산하는데 있어서 가장 까다로운 것은 curl의 계산이다. 다음과 같은 표현법을 이용하면 curl의 계산을 조작적으로 할 수 있다[19].

$$\begin{aligned} (\nabla \times \hat{N}_j \hat{e}_v)_u^m &= \left(R_{uv}^{(1)} + m R_{uv}^{(2)} \right) \hat{N}_j + R_{uv}^{(3)} \frac{d\hat{N}_j}{d\rho} \\ R_{11}^{(1)} &= \gamma_{\psi\psi} & R_{11}^{(2)} &= 0 & R_{11}^{(3)} &= 0 \\ R_{12}^{(1)} &= -i \frac{n}{R} \cos \Theta - \gamma_{\psi\eta} & R_{12}^{(2)} &= -i \frac{1}{N_x} \sin \Theta & R_{12}^{(3)} &= 0 \\ R_{13}^{(1)} &= -i \frac{n}{R} \sin \Theta + \gamma_{\psi b} & R_{13}^{(2)} &= i \frac{1}{N_x} \cos \Theta & R_{13}^{(3)} &= 0 \\ R_{21}^{(1)} &= i \frac{n}{R} \cos \Theta + \gamma_{\eta\psi} & R_{21}^{(2)} &= i \frac{1}{N_x} \sin \Theta & R_{21}^{(3)} &= 0 \\ R_{22}^{(1)} &= \gamma_{\eta\eta} & R_{22}^{(2)} &= 0 & R_{22}^{(3)} &= 0 \\ R_{23}^{(1)} &= -\gamma_{\eta b} & R_{23}^{(2)} &= i \frac{1}{N_x} \frac{G}{J} & R_{23}^{(3)} &= -\frac{N_x}{J} \\ R_{31}^{(1)} &= i \frac{n}{R} \sin \Theta - \gamma_{b\psi} & R_{31}^{(2)} &= -i \frac{1}{N_x} \cos \Theta & R_{31}^{(3)} &= 0 \\ R_{32}^{(1)} &= \gamma_{b\eta} & R_{32}^{(2)} &= -i \frac{1}{N_x} \frac{G}{J} & R_{32}^{(3)} &= \frac{N_x}{J} \\ R_{33}^{(1)} &= \gamma_{bb} & R_{33}^{(2)} &= 0 & R_{33}^{(3)} &= 0 \end{aligned}$$

수직 성분만의 curl은 아래의 관계때문에 위의 notation을 그대로 쓸 수 있다.

$$(\nabla_{\perp} \times \hat{N}_j \hat{e}_{v \perp})_{\parallel}^m = (\nabla \times \hat{N}_j \hat{e}_{v \perp})_{\parallel}^m$$

7.4 보간함수

파동방정식을 weak form으로 바꾸고 나면, 전장의 $v = \eta, b$ 성분에 대해서만 ρ 에 대한 1차 미분이 있다. 따라서, 모든 전장 성분에 대해 동일한 차수의 보간함수를 사용했을 때에는 가상적인 해가 수치적으로

발생할 수 있다. 이러한 문제를 해결하고, 또 계산시간도 줄이기 위해 다음과 같이 상수 보간함수와 선형 보간함수를 사용하였다[31, 32]. 즉, $v = \psi$ 에 대해서는 다음과 같이 상수 보간함수를 사용하였다.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(1 - \text{sgn}(\xi)) \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(\xi)) \\ \frac{dN_1}{d\rho} &= 0 \\ \frac{dN_2}{d\rho} &= 0 \end{aligned}$$

또, $v = \eta, b$ 에 대해서는 선형 보간함수를 사용하였다.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \\ \frac{dN_1}{d\rho} &= -\frac{1}{h} \\ \frac{dN_2}{d\rho} &= +\frac{1}{h} \end{aligned}$$

각 함수의 범위는 $-1 \leq \xi \leq 1$ 이다.

7.5 수치적분

요소 행렬을 계산하는데에는 ξ 와 θ 에 대한 적분을 수행해야 한다. 우선 ξ 에 대한 적분은 Gauss 적분법을 이용한다[25].

$$\int_{-1}^1 f(\xi, \theta) d\xi \approx \sum_l f(\xi_l, \theta) w_l \quad (128)$$

여기서, ξ_l 과 w_l 은 Gauss 적분법에서 주어지는 적분점과 가중치이다. 각각의 적분점에 대해서는 다음의 방법으로 θ 에 대한 적분을 수행한다. 먼저, 고속 Fourier 변환(Fast Fourier Transform, FFT)을 이용하여 $f(\xi_l, \theta)$ 를 급수 전개한다[33, 34].

$$f(\xi_l, \theta) \approx \sum_{m''=-N/2}^{N/2} f^{(m'')}(\xi_l) e^{im''} \quad (129)$$

여기서, N 은 방위 각 방향의 격자수이다. θ 적분에 관한 다음의 직교성을 이용하면,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\theta} e^{im''} d\theta = 2\pi \delta_{m-m', -m''} \quad (130)$$

결과적으로 다음과 같이 적분이 계산된다.

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\theta} f(\xi_l, \theta) d\theta = 2\pi f^{(m'-m)}(\xi_l) \quad (131)$$

여기서, 풀로이달 모드에 대한 범위는

$$-M \leq m, m' \leq M$$

$$-2M \leq m - m' \leq 2M$$

이므로

$$2M \leq N/2 \quad (132)$$

로 제한된다.

7.6 시스템 행렬

각각의 요소에서 계산된 요소행렬을 global 절점 번호 k 에 대해 조합하면, 다음과 같은 형태이다.

$$\mathcal{A}_k \mathbf{u}_{k-1} + \mathcal{B}_k \mathbf{u}_k + \mathcal{C}_k \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{s}_k \quad (133)$$

$$\mathcal{A}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathcal{B}_k \neq \mathbf{0}, \quad \mathcal{C}_{k_{max}} = \mathbf{0}$$

윗 식에 사용된 벡터의 크기는 $(2M + 1) \times 3$ 이며, 행렬들은 $[(2M + 1) \times 3]^2$ 의 정방행렬이다. 시스템 행렬의 source 벡터 \mathbf{s}_k 는 요소행렬을 조합할 때, 안테나 좌우 요소의 면적분의 차이로 다음과 같이 계산되고,

$$s_{k_{ant}}^{m',v'} \simeq i\omega\mu_0 4\pi^2 r_A R_T K_a^{m'} (\hat{e}_{v'} \cdot \hat{e}_a) \quad (134)$$

그 밖의 절점에서는 모두 $\mathbf{0}$ 이다. 위의 시스템 행렬은 Block-Tridiagonal 행렬의 형태이므로, LU-분리법에 의해 쉽게 그 해가 구해진다[33, 35].

7.7 경계조건

먼저, 원점에서는 전장이 방위각에 무관하게 유일하게 결정되어야 한다. 원점근처에서 자속면을 원형에 가깝게 설정하면, 원통좌표계에서의 전장 성분은 다음과 같이 근사된다.

$$E_R = E_\psi \cos \theta - E_\eta \sin \theta$$

$$E_Z = E_\psi \sin \theta + E_\eta \cos \theta$$

$$E_\phi = E_b$$

전장의 각 성분들을 Fourier 모드로 급수전개하면,

$$\begin{aligned} E_R &= \sum_m e^{im\theta} [E_\psi^m \cos \theta - E_\eta^m \sin \theta] \\ &= \sum_m e^{im\theta} [E_\psi^m e^{\mp i\theta} \pm i(E_\psi^m \pm iE_\eta^m) \sin \theta] \\ E_Z &= \sum_m e^{im\theta} [E_\psi^m \sin \theta + E_\eta^m \cos \theta] \\ &= \sum_m e^{im\theta} [E_\eta^m e^{\mp i\theta} + (E_\psi^m \pm iE_\eta^m) \sin \theta] \\ E_\phi &= \sum_m e^{im\theta} E_b^m \end{aligned}$$

이므로, 다음과 같은 경계조건을 얻는다.

$m = \pm 1$ 일 때,

$$E_\psi^m \pm iE_\eta^m = 0 \quad (135)$$

$m \neq \pm 1$ 일 때,

$$E_\psi^m = 0 \quad (136)$$

$$E_\eta^m = 0 \quad (137)$$

$m \neq 0$ 일 때,

$$E_b^m = 0 \quad (138)$$

한편, Faraday screen에서는 기울어진 각도의 풀로이달 의존성을 무시하여

$$-\sin(\Theta - \beta)_0 E_\eta^m + \cos(\Theta - \beta)_0 E_b^m = 0 \quad (139)$$

로 나타내고, 완전 도체벽에서는

$$E_b^m = E_\eta^m = 0 \quad (140)$$

이다.

제 8 절 KSTAR 토카막에의 적용

8.1 주요 입력값

개발된 전산코드를 차세대 초전도 핵융합 연구장치 개발 사업으로 현재 국내에 건설중인 KSTAR 토카막[21]에 적용하여 fast wave의 전파 및 흡수, 전류구동 등의 특성을 조사하였다. 우선 기본적인 KSTAR 토카막의 설계값을 바탕으로 MHD 평형을 계산하였다.

Parameter	Symbol	Value
Major radius	R_0	1.80 m
Radius of separatrix	a_s	0.50 m
Radius of Faraday screen	a_F	0.55 m
Radius of antenna	a_a	0.60 m
Radius of conducting wall	a_w	0.70 m
Elongation	κ_{95}	1.8
Triangularity	δ_{95}	0.5
B-field at machine center	B_0	3.5 T
Plasma current	I_p	2 MA

표 1: KSTAR 토카막의 기본적인 설계값

표준적인 평형상태를 가정하였기 때문에, 안전인자(safety factor)는 자속함수에 따라 단조증가한다. MHD 평형계산의 결과를 이용하여, FWCD 모사 코드에 사용될 격자를 생성하였다. 진공영역은 MHD 평형계산에서 주어지지 않기 때문에, 간단히 외삽법으로 근사값을 얻었다. 진공에서의 자장구조는 fast wave에 크게 영향을 주지 않으므로 이런 방법도 무난하다. 폴로이달 방위각에 대한 격자는 균일하게 만들어 FFT를 쉽게 할 수 있도록 하였다. 토카막의 계산영역은 플라즈마의 특성에 따라, separatrix 안쪽의 노심 플라즈마 영역, separatrix에서 Faraday screen까지의 경계 플라즈마 영역, Faraday screen에서 안테나 까지의 cold 플라즈마 영역, 안테나 바깥의 진공으로 나누었다. 경계 플라즈마까지만 hot 플라즈마 모형을 사용하였기 때문에, Faraday screen 바깥에서는 에너지 흡수가 일어나지 않는다. 밀도와 온도에 사용된 profile은 다음과 같다.

$$n = \begin{cases} n_0 \left\{ (1 - \delta_n)(1 - \hat{\psi})^{\alpha_n} + \delta_n \right\}, & \rho \leq \rho_s \\ n_0 \delta_n \exp \left\{ -(\rho - \rho_s)/\lambda_n \right\}, & \rho_s < \rho \leq \rho_F \\ n_0 \delta_n \exp \left\{ -(\rho_F - \rho_s)/\lambda_n \right\}, & \rho_F < \rho \end{cases} \quad (141)$$

$$T = \begin{cases} T_0 \left\{ (1 - \delta_T)(1 - \hat{\psi})^{\alpha_T} + \delta_T \right\}, & \rho \leq \rho_s \\ T_0 \delta_T \exp \left\{ -(\rho - \rho_s)/\lambda_T \right\}, & \rho_s < \rho \leq \rho_F \\ T_0 \delta_T \exp \left\{ -(\rho_F - \rho_s)/\lambda_T \right\}, & \rho_F < \rho \end{cases} \quad (142)$$

토카막 중심부에서의 profile은 MHD 평형계산과의 일관성을 위해 정규화된 폴로이달 자속을 이용하여 나타내었다. 안테나 설계제원은 한국원자력연구소에서 제안한 개념설계값을 잠정적으로 사용하였

Parameter	Symbol	Value
Electron density		
at magnetic axis	n_{e0}	$1.25 \times 10^{20} m^{-3}$
Electron temperature		
at magnetic axis	T_{e0}	10 keV
Ion temperature		
at magnetic axis	T_{i0}	10 keV
Profile factor for density	α_n	0.5
Profile factor for temperature	α_T	1.0
Decay length for density	λ_n	0.01 m
Decay length for temperature	λ_T	0.05 m
Effective charge number	Z_{eff}	1.6

표 2: 플라즈마 porfile

다[21]. 전류구동을 위해서는 $\pi/2$ 의 위상차를, 가열을 위해서는 π 의 위상차를 두도록 하였고, 동작주파수는 38, 50, 75 MHz가 고려되었다.

Parameter	Symbol	Value
Operating frequency	f	38, 50, 75 MHz
Number of antenna	N_A	4
Antenna width	L_T	0.18 m
Antenna height	L_P	0.65 m
Antenna separation	w_d	0.09 m
Curret peak at antenna center	I_0	1 A
Propagation constant	β	0.62
Relative phase	$\Delta\phi$	$\pi/2, \pi$
Radiated power	P_{RF}	6 MW

표 3: 안테나 설계값

표적 플라즈마는 D(95%)-H(5%) 플라즈마로 가정하였고, 고려된 운전모드는 표 4에 로 요약하였다. KSTAR FWCD의 표준 운전모드는 D(95%)-H(5%) 플라즈마에서 38 MHz로 동작할 때이다. 이 때, D와 H에 대한 이온공명을 토카막 중심부에서 피할 수 있게 된다. 하지만, 토카막 안쪽의 경계영역에서 약간의 이온 공명을 만나게 된다. KSTAR ICRH의 표준 운전모드는 D(95%)-H(5%) 플라즈마에서 50 MHz로 동작할 때이다. 이 때, H의 1차 이온공명과 D의 2차 이온공명에 의해 효율적인 이온가열이 토카막 중심부에서 일어난다. 비교적 높은 주파수인 75 MHz에서도 전류구동을 생각해 볼 수가 있는데, 이

Frequency	D(95%)-H(5%)
38 MHz	Current drive
50 MHz	Minority heating
75 MHz	Current drive(3rd D?)

표 4: 운전모드

때는 D의 3차 이온공명 효과가 중요하게 된다.

우선 안테나의 파수스펙트럼이 최대가 되는 토로이달 모드에 대하여 각각의 운전모드에 따른 fast wave의 특성을 살펴보았다.

$$n_{peak} = - \left[\frac{\Delta\phi}{w_d/R_T} \right] \approx \begin{cases} -20, & \Delta\phi = \pi/2 \\ -41, & \Delta\phi = \pi \end{cases} \quad (143)$$

계산에 사용된 격자수 및 모드수의 범위는 다음과 같다. 그 밖의 입력값들은 부록의 전산코드 입력 화

Parameter	Value
Number of radial grid points	170
Number of poloidal grid points	65
Poloidal modes	$-7 \leq m \leq 7$
Toroidal modes	$-60 \leq n \leq 60$
Number of Gauss integration points	3

표 5: 수치적 변수

일을 참고하기 바란다.

8.2 주요 계산결과

1. MHD 평형계산 및 자속좌표계 생성
2. 동작주파수 및 안테나 파수스펙트럼 설정
3. $f = 38MHz, n = -20$ 에서의 FWCD 특성
4. $f = 38MHz, -60 \leq n \leq 60$ 에서의 FWCD 특성
5. $f = 50MHz, n = -41$ 에서의 ICRH 특성
6. $f = 75MHz, n = -20$ 에서의 FWCD 특성(3rd D 고려하지 않음)
7. $f = 75MHz, n = -20$ 에서의 FWCD 특성(3rd D 고려)

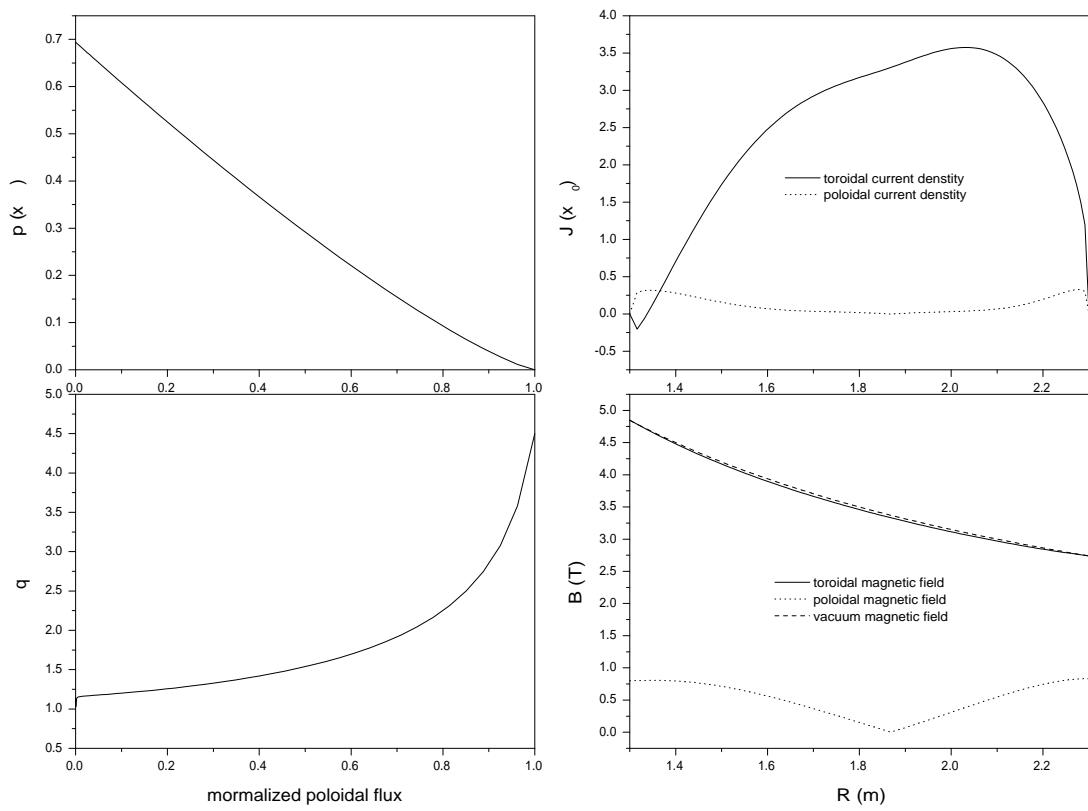


그림 1: Profiles of normal shear mode.

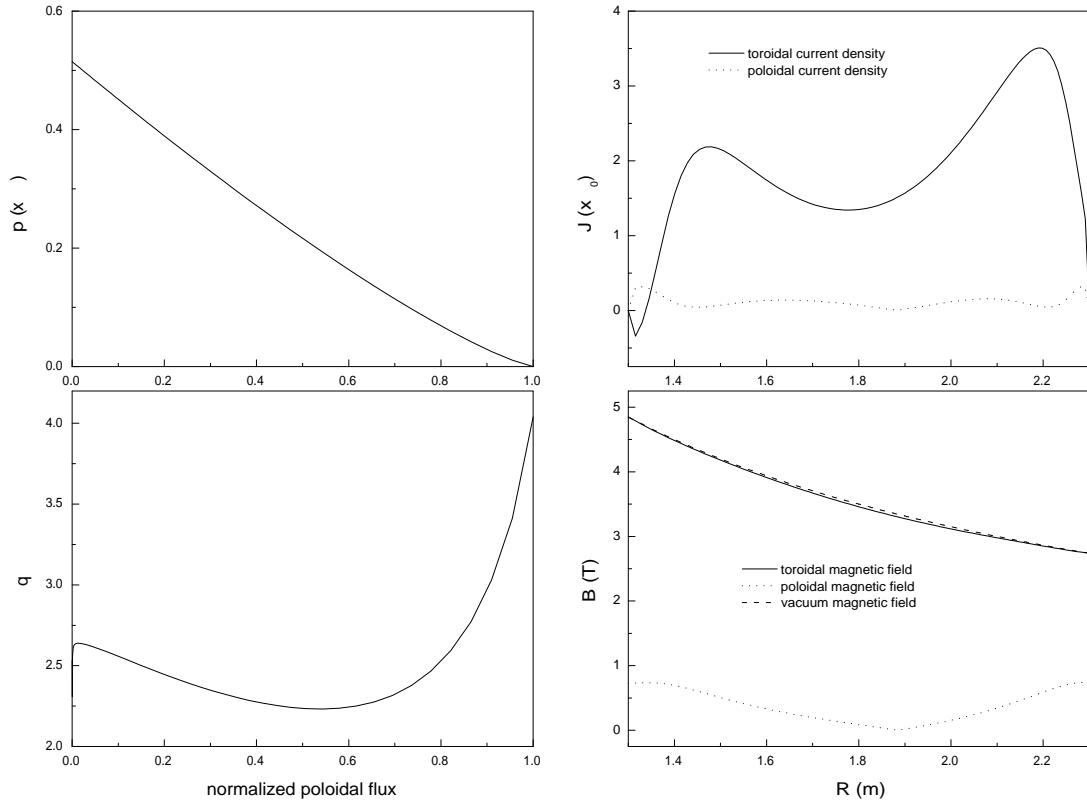


그림 2: Profiles of reversed shear mode.

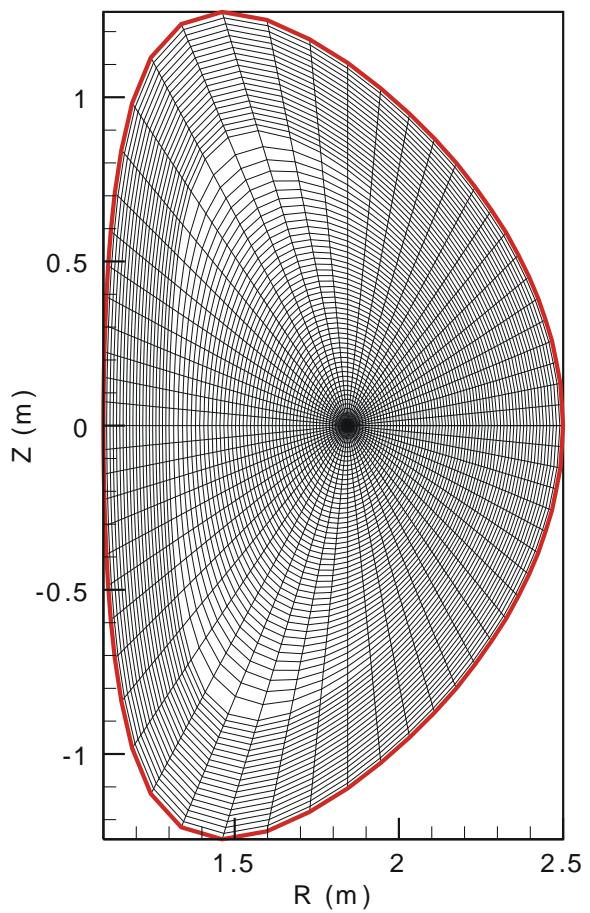


Fig. 1-3: Mesh configuration for FWCD simulation

그림 3: Mesh configuration for FWCD simulation

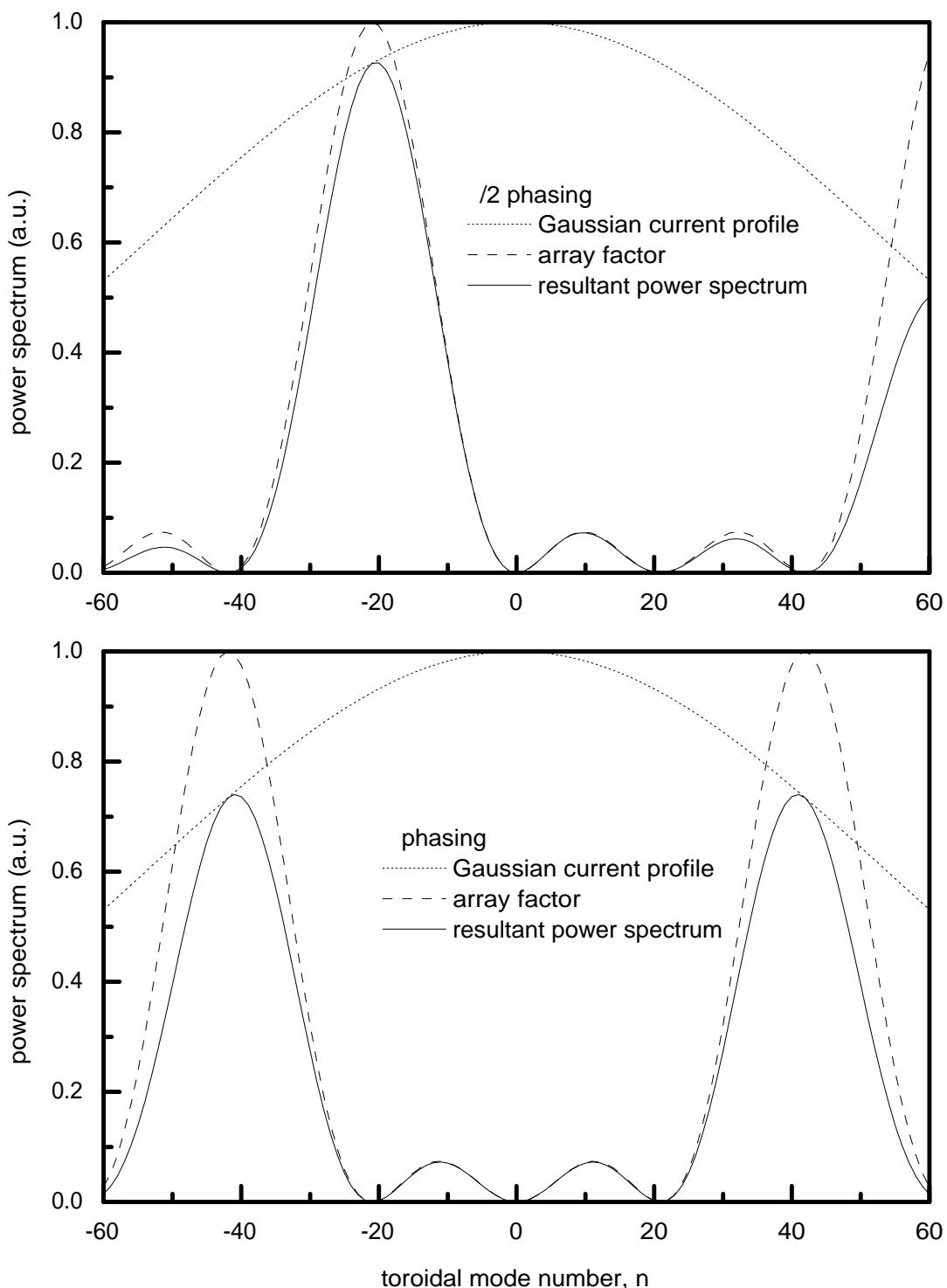


그림 4: Antenna power spectrum

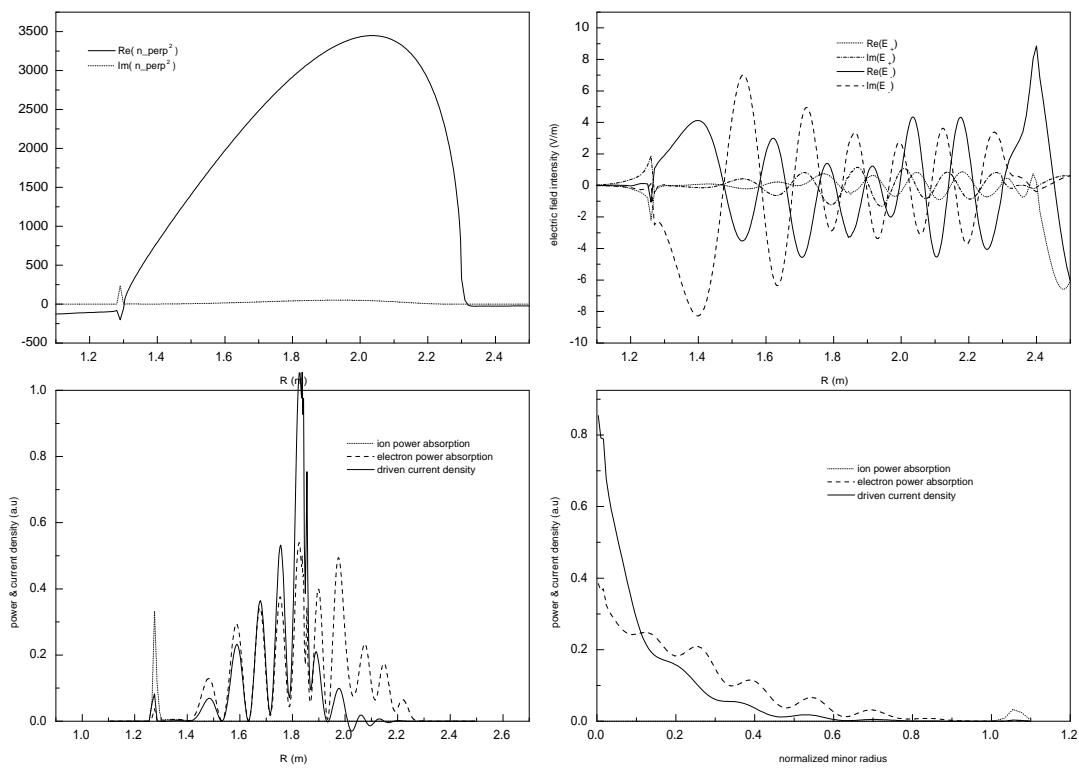


그림 5: Distribution of fast wave electric field and absorbed power

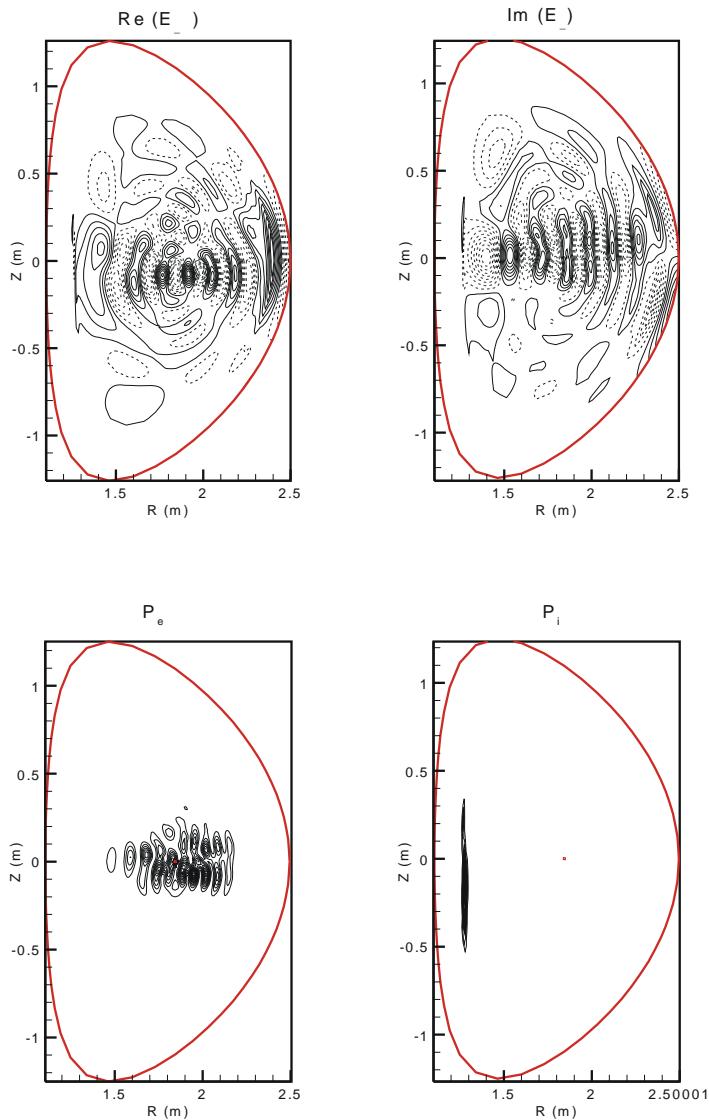


Fig. 3-2: Distribution of fast wave electric field and absorbed power

그림 6: Distribution of fast wave electric field and absorbed power

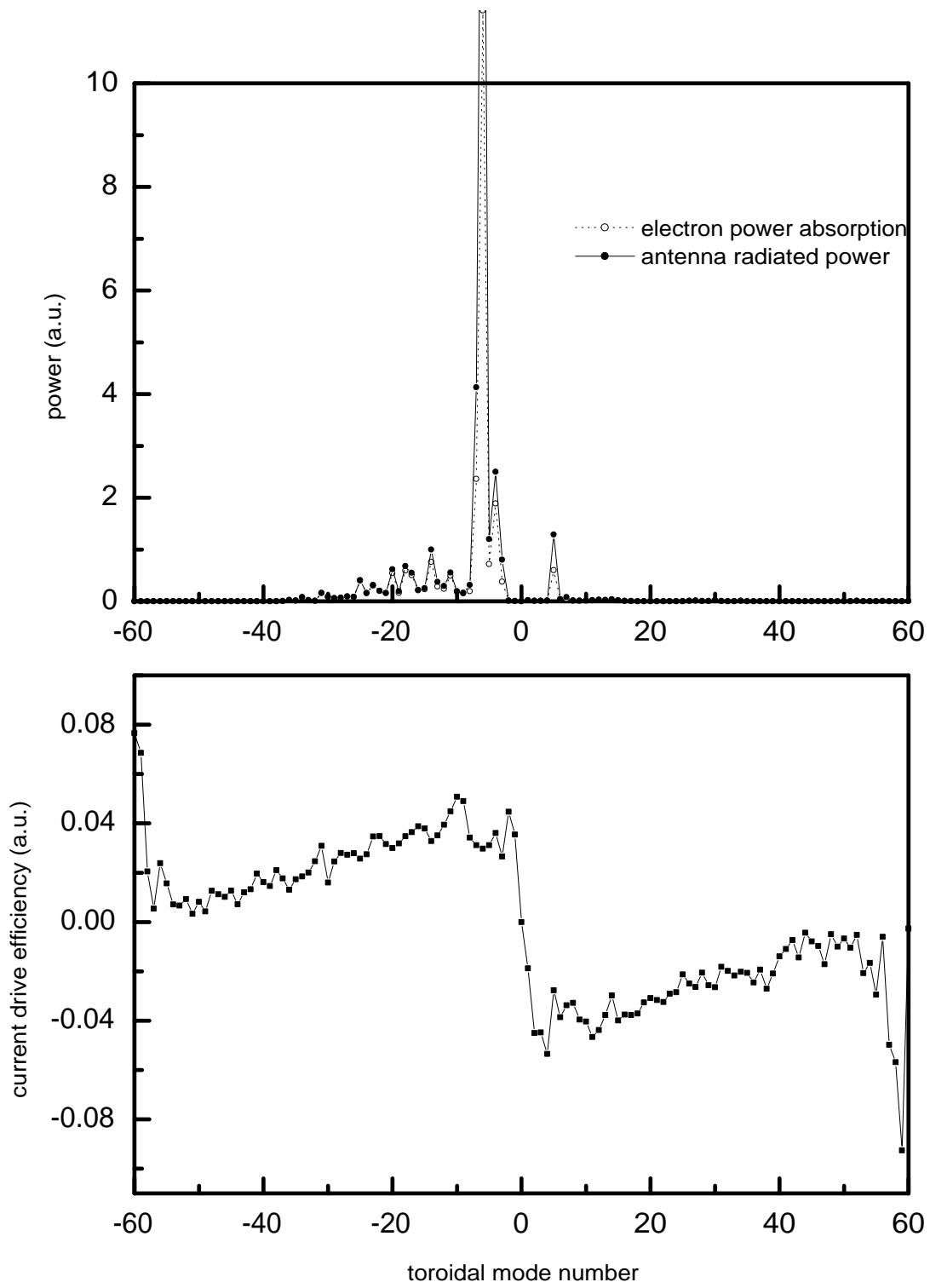


그림 7: Toroidal mode spectrum of power and current drive efficiency

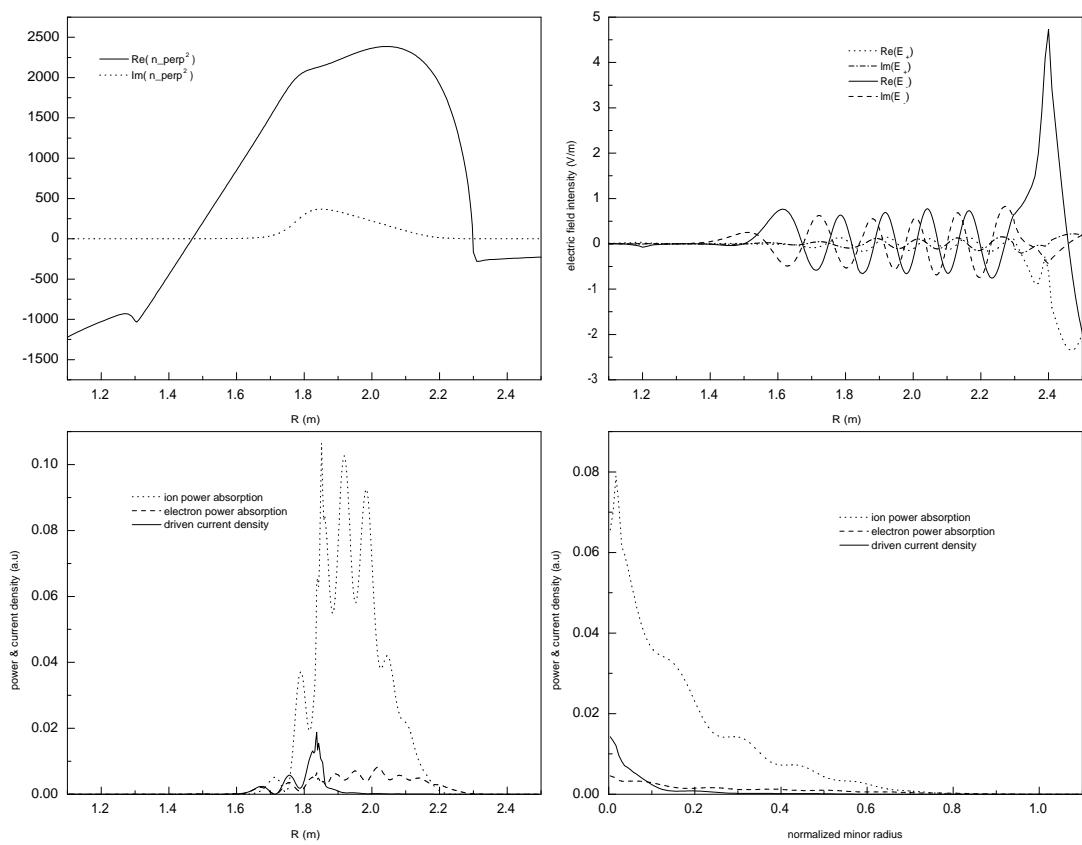


그림 8: Distribution of fast wave electric field and absorbed power

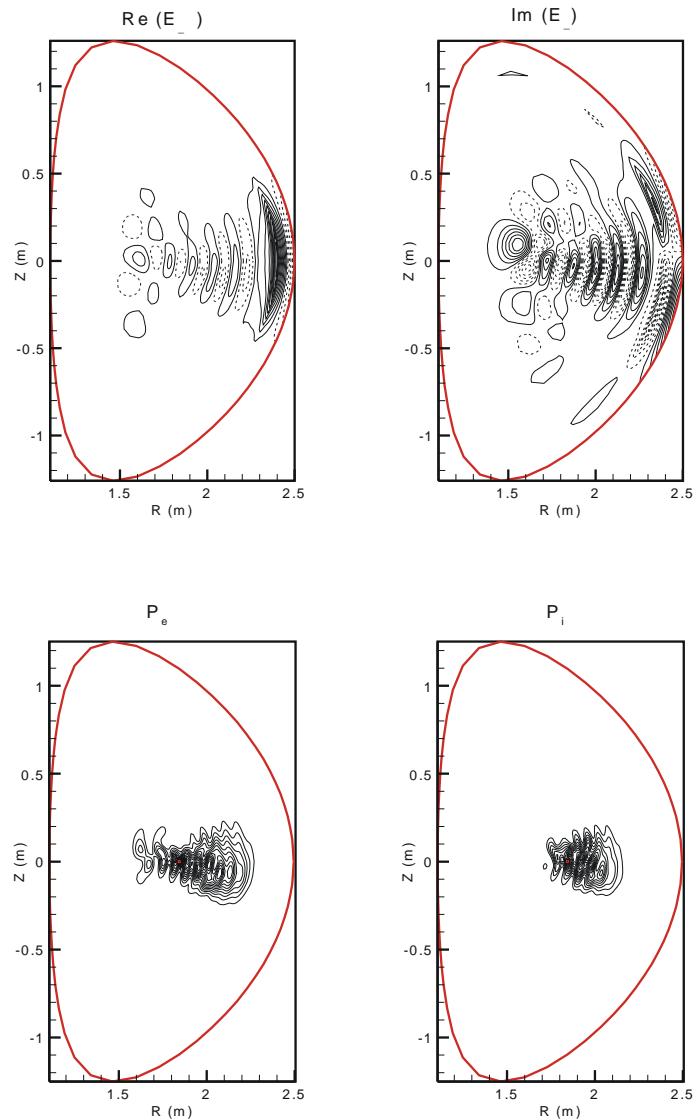


Fig. 5-2: Distribution of fast wave electric field and absorbed power

그림 9: Distribution of fast wave electric field and absorbed power

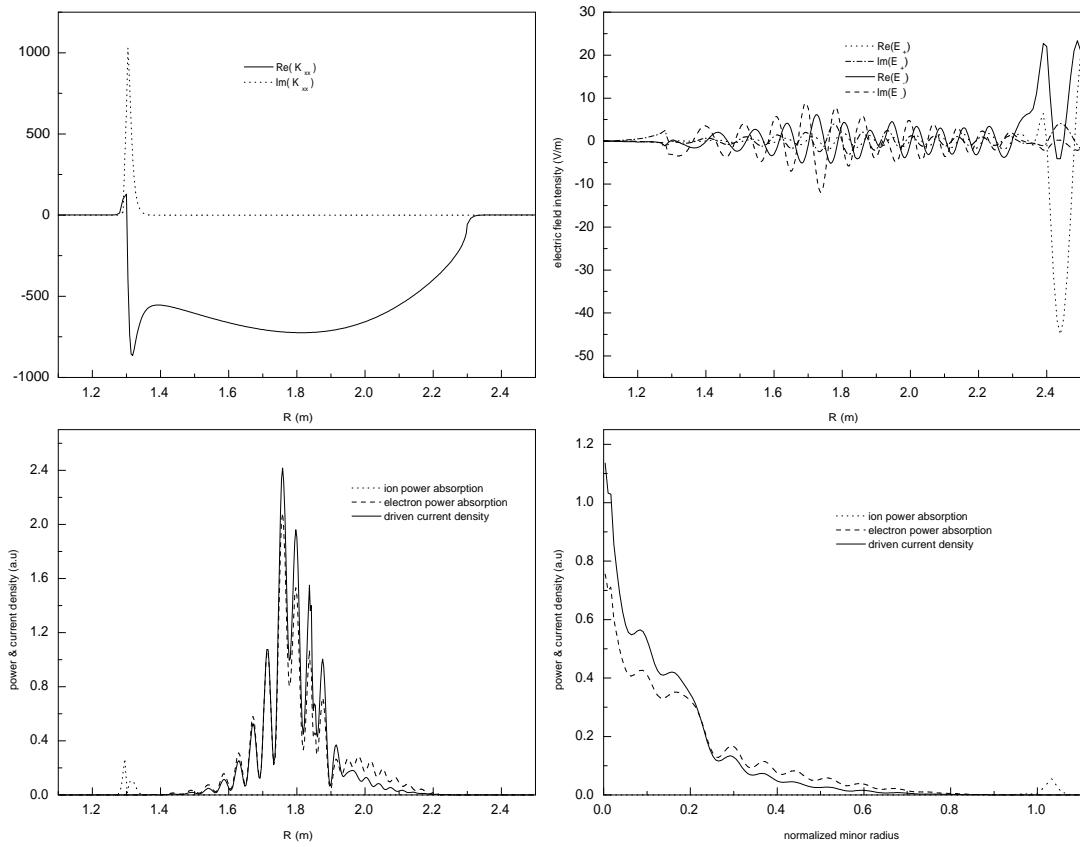


그림 10: Distribution of fast wave electric field and absorbed power

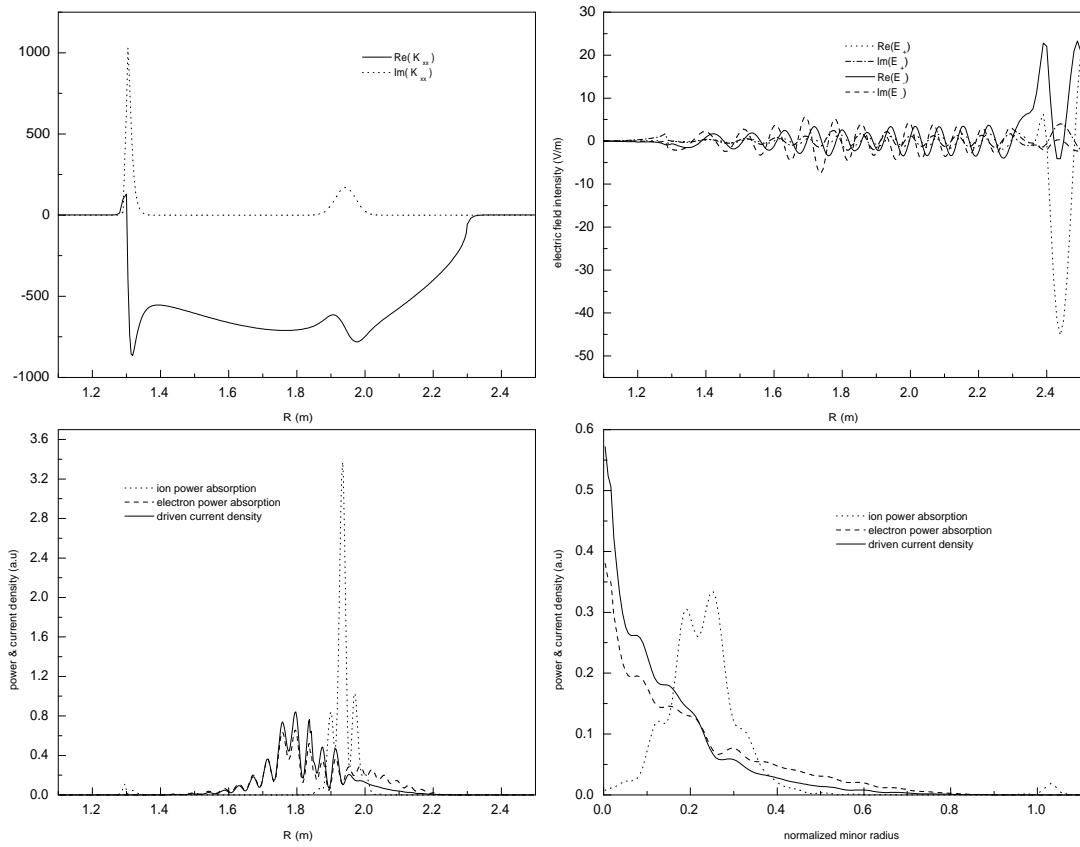


그림 11: Distribution of fast wave electric field and absorbed power

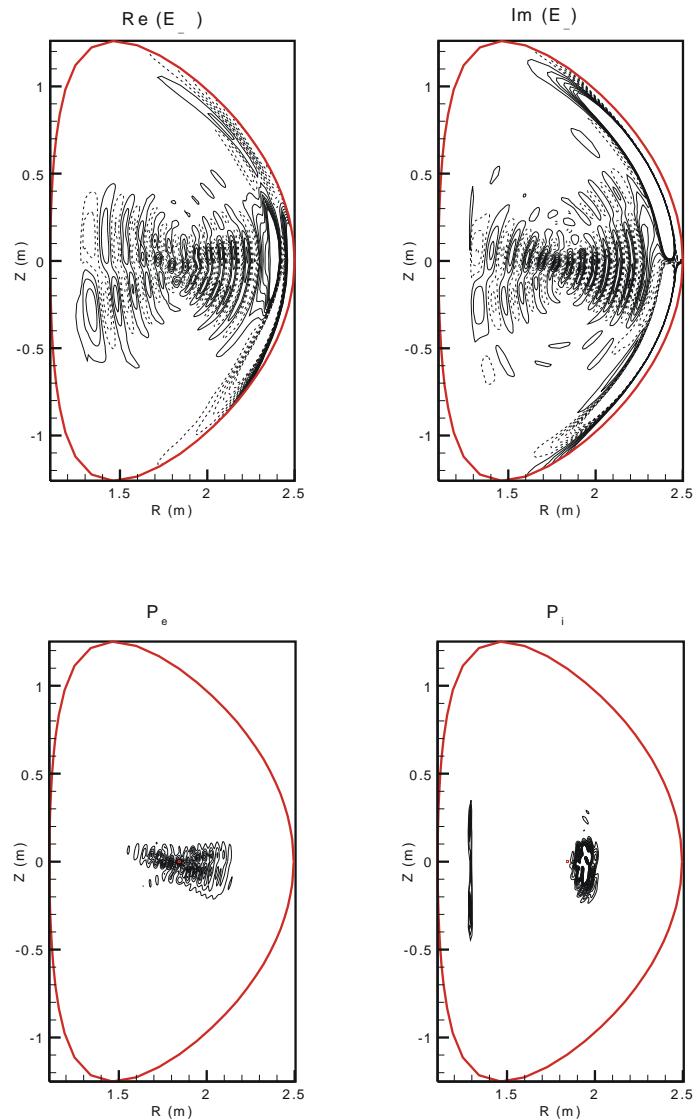


Fig. 7-2: Distribution of fast wave electric field and absorbed power

그림 12: Distribution of fast wave electric field and absorbed power

참고 문헌

- [1] 김성규 외, *플라즈마-전자파 상호작용에 의한 이온가열 및 전류여기 연구 (I)*, 한국표준과학연구원 (1993).
- [2] 인상렬 외, *토카막 장치기술 개발*, 한국원자력연구소 (1994).
- [3] 정모세, *석사학위논문*, 서울대학교 (1996).
- [4] 조수원 외, *토카막 fast wave 가열 및 전류구동의 파동물리적 연구*, 경기대학교 (1996).
- [5] C. N. Lashmore-Davies *et al.*, Phys. Fluids **31**, 1614(1988).
- [6] T. H. Stix, *Waves in Plasmas* (AIP, New York, 1992).
- [7] K. Miyamoto, *Plasma Physics for Nuclear Fusion* (MIT press, Cambridge, 1989).
- [8] R. A. Cairns, *Radiofrequency Heating of Plasmas* (Adam Hilger, Bristol, 1991).
- [9] A. Becoulet, Plasma Phys. Contr. Fusion **38**, A1(1996).
- [10] PPPL, *Physics Description of Tokamak Physics Experiment* (1993).
- [11] D. A. Ehst *et al.*, Nucl. Fusion **31**, 1933(1991).
- [12] K. Itoh *et al.*, Nucl. Fusion **24**, 13(1984).
- [13] E. F. Jaeger *et al.*, Comp. Phys. Comm. **40**, 33(1986).
- [14] D. N. Smithe *et al.*, Nucl. Fusion **27**, 1319(1987).
- [15] P. E. Moroz *et al.*, Plasma Phys. Contr. Fusion **33**, 417(1991).
- [16] E. F. Jaeger *et al.*, Nucl. Fusion **33**, 179(1993).
- [17] E. F. Jaeger *et al.*, Nucl. Fusion **38**, 437(1998).
- [18] M. Brambilla *et al.*, Nucl. Fusion **28**, 1813(1988).
- [19] M. Brambilla, *A Full Wave Code for Ion Cyclotron Waves in Toroidal Plasmas* (Max-Planck IPP, Garching, 1996).
- [20] J. C. Wright *et al.*, Nucl. Fusion **37**, 1349(1997).
- [21] KBSI, *KSTAR Physics Validation Review Presentations* (1997).
- [22] R. Gruber *et al.*, *Finite Element Methods in Linear Ideal Magnetohydrodynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
- [23] J. P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics* (Plenum press, New York, 1987).

- [24] H. Lutjens *et al.*, Comp. Phys. Comm. **97**, 219(1996).
- [25] 김창효, 수치해법과 전산 프로그래밍 (교학사, 서울, 1990).
- [26] C. N. Lashmore-Davies *et al.*, Phys. Plasmas **5**, 2284(1998).
- [27] D. B. Batchelor *et al.*, Fusion Technol. **21**, 1214(1992).
- [28] F. W. Baity *et al.*, Fusion Engrg. Des. **24**, 91(1994).
- [29] 강경두, 석사학위논문, 서울대학교 (1991).
- [30] E. B. Becker *et al.*, *Finite Elements, An Introduction* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1981).
- [31] O. Sauter *et al.*, Comp. Phys. Comm. **84**, 226(1994).
- [32] P. Lin *et al.*, SIAM J. Numer. Anal. **34**, 779(1997).
- [33] W. H. Press *et al.*, *Numerical Recipes in C* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988).
- [34] B. H. Flowers, *An Introduction to Numerical Methods in C++* (Clarendon Press, Oxford, 1995).
- [35] K. A. Hoffmann *et al.*, *Computational Fluid Dynamics for Engineers* (Eng. Education System, Wichita, 1993).