Algorithmes sous-linéaires pour polygones convexes

Antoine Vigneron

antoine.vigneron@jouy.inra.fr

Département mathématiques et informatique appliquées

INRA Jouy-en-Josas

Introduction

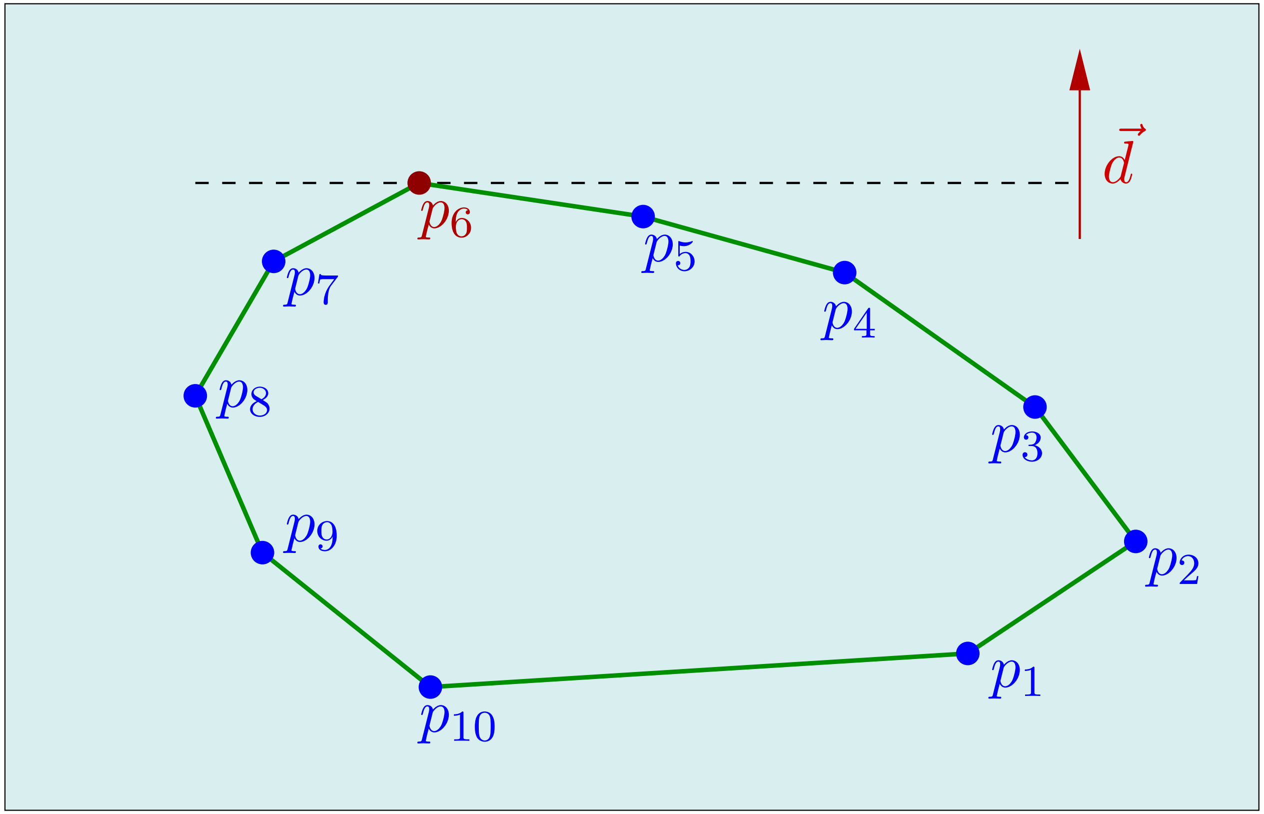
Références

- Travail en collaboration avec Hee-Kap Ahn, Peter Brass, Otfried Cheong, Hyeon-Suk Na, Cheong-Dae Park, Chan-Su Shin.
- Références:
  - Inscribing an axially symmetric polygon and other approximation algorithms for planar convex sets. [pdf]
  - Maximizing the overlap of two planar convex sets under rigid motion. [pdf, anglais][pdf, coréen]

Plan

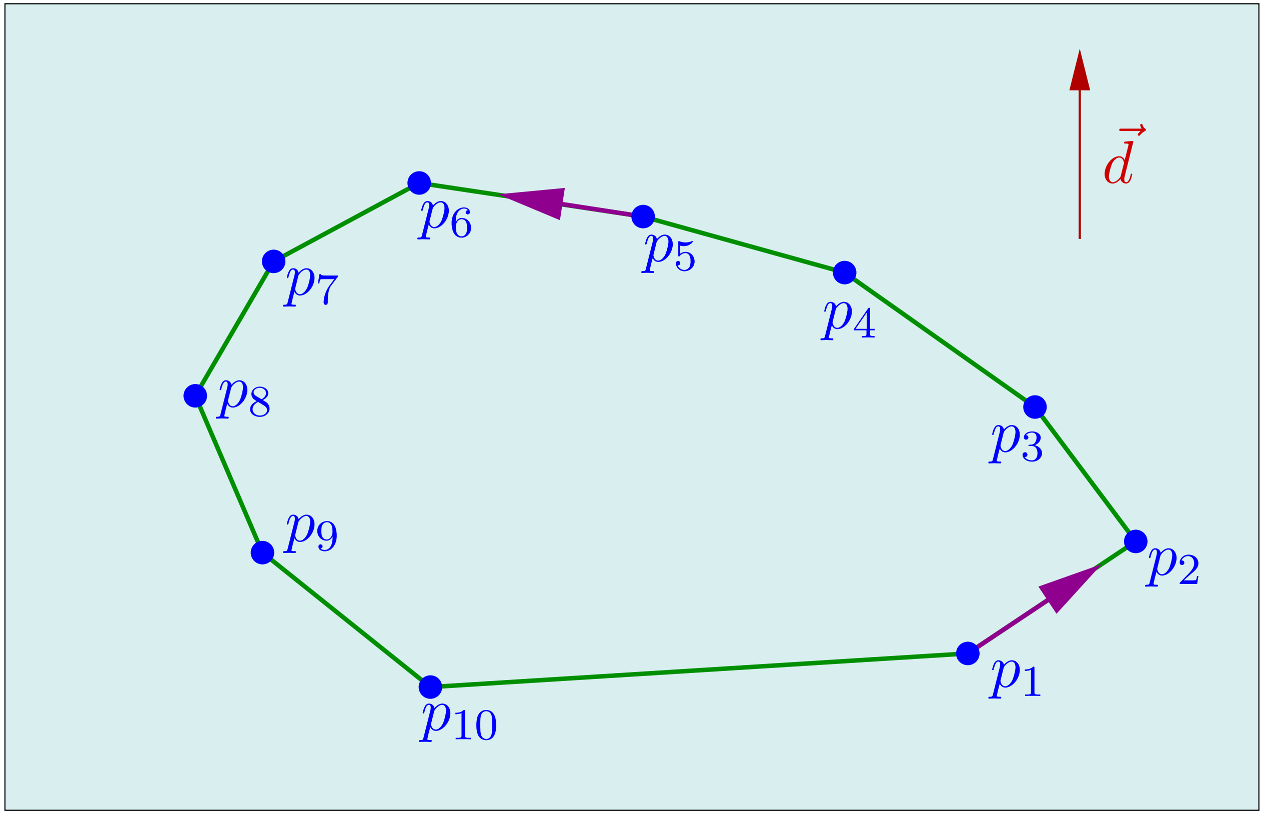
- Introduction
- Approximation du diamètre
- Généralisation
- Isométrie maximisant l'aire d'intersection de deux polygones convexes

Calcul des points extrêmes



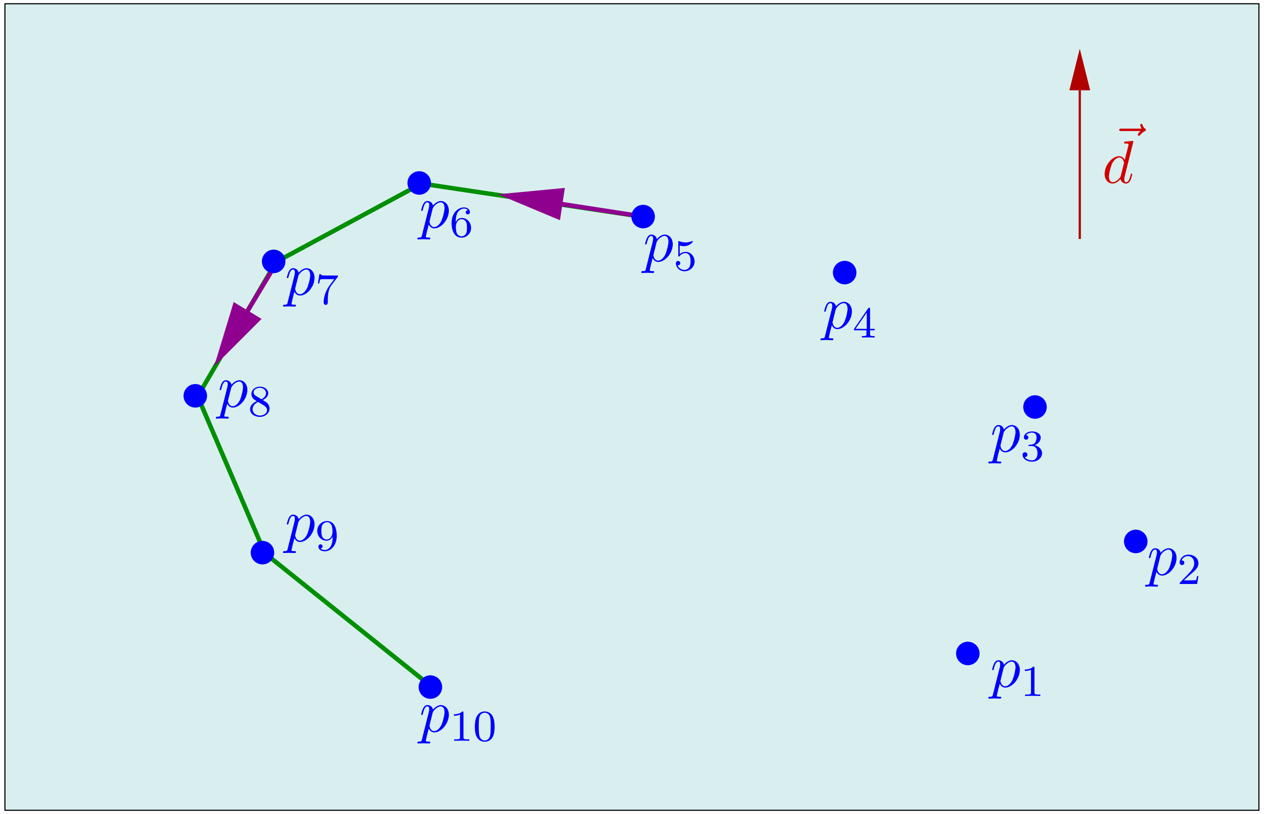
- Entrée: direction $\vec{d}$, tableau ordonné des sommets $p_1, p_2 \ldots p_n$ d'un polygone convexe P.
- Sortie: sommet p_i qui maximize $\vec{d}.\overrightarrow{Op_i}$.

Calcul des points extrêmes



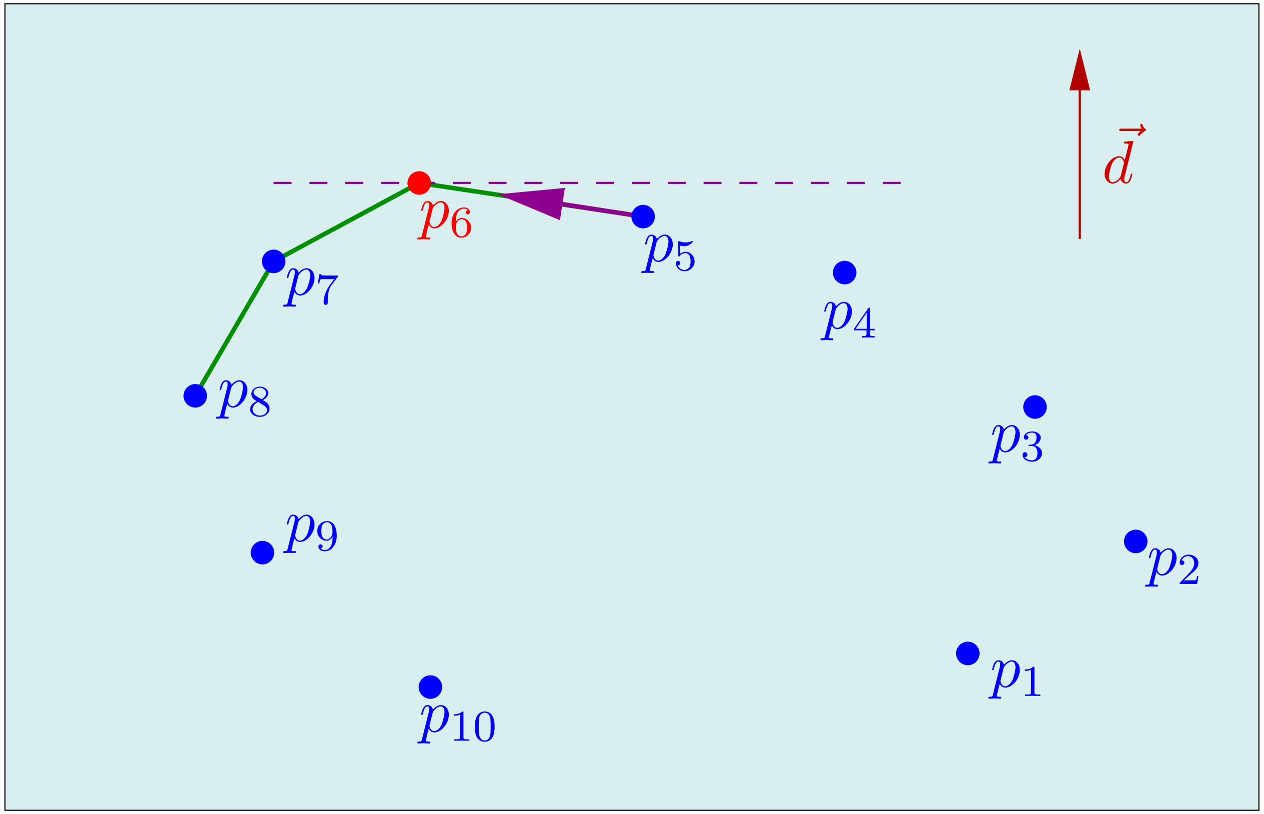
- Calcul en temps $O(\log n)$ par dichotomie.
- $\overrightarrow{p_1p_2}.\vec{d} \geqslant 0$ et $\overrightarrow{p_5p_6}.\vec{d} \geqslant 0$
- $\Longrightarrow$ la solution est entre p_5 et p_{10}.

Calcul des points extrêmes



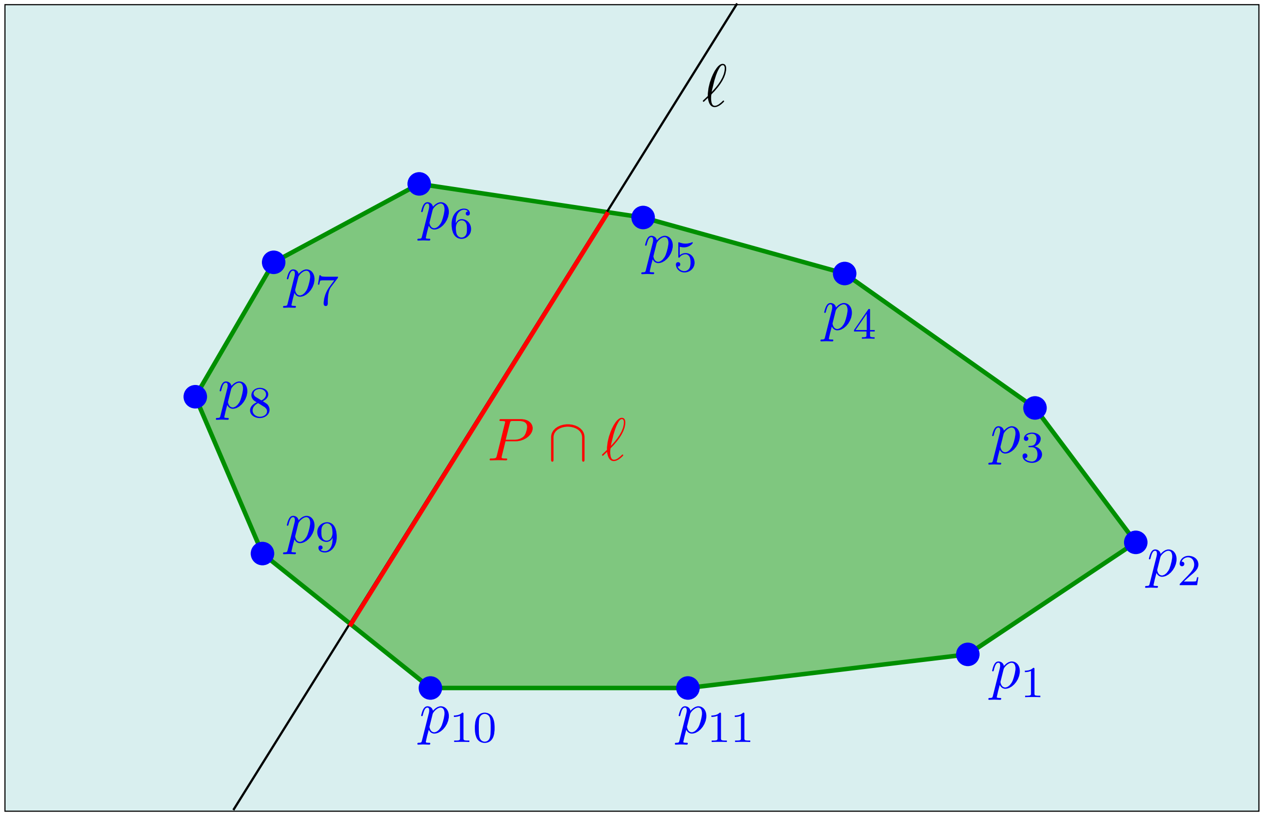
- Calcul en temps $O(\log n)$ par dichotomie.
- $\overrightarrow{p_5p_6}.\vec{d} \geqslant 0$ et $\overrightarrow{p_7p_8}.\vec{d} \leqslant 0$
- $\Longrightarrow$ la solution est entre p_5 et p_8.

Calcul des points extrêmes



- $\overrightarrow{p_5p_6}.\vec{d} \geqslant 0$ et $\overrightarrow{p_6p_7}.\vec{d} \leqslant 0$
- $\Longrightarrow$ renvoie p_6

Intersection avec une droite

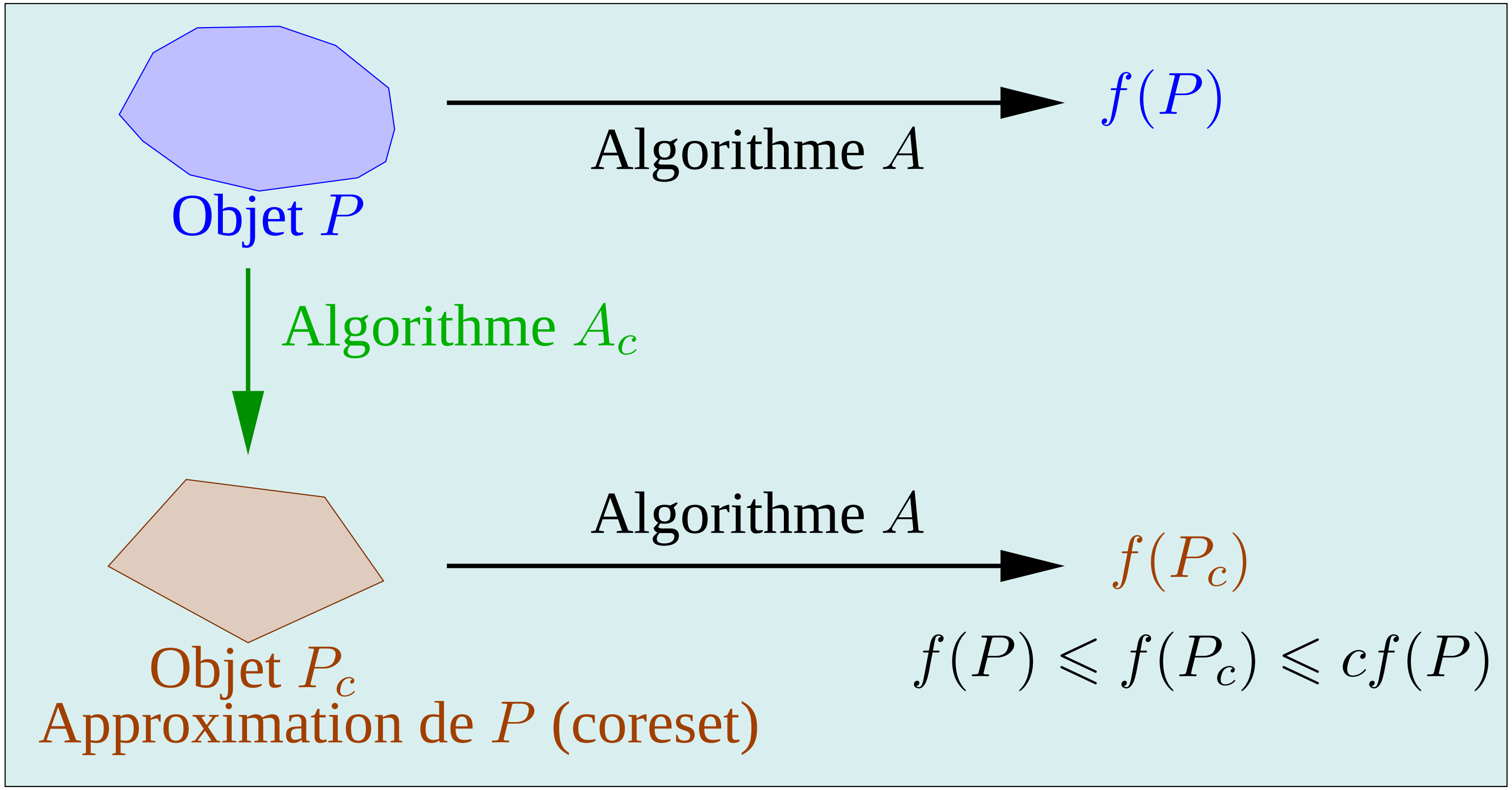


- Le segment $\ell \cap P$ peut être calculé en temps $O(\log n)$.

Autres problèmes

- En revanche, les problèmes suivants on pour complexité $\Theta(n)$:
  - Aire
  - Diamètre
  - Périmètre
  - Largeur
  - Disque (ou rectangle) couvrant minimal
- Approximation en temps sous-linéaire?
  - Facteur constant en temps $O(\log n)$
  - Facteur $(1 - \varepsilon)$ en temps $O\left(\frac{\log n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$

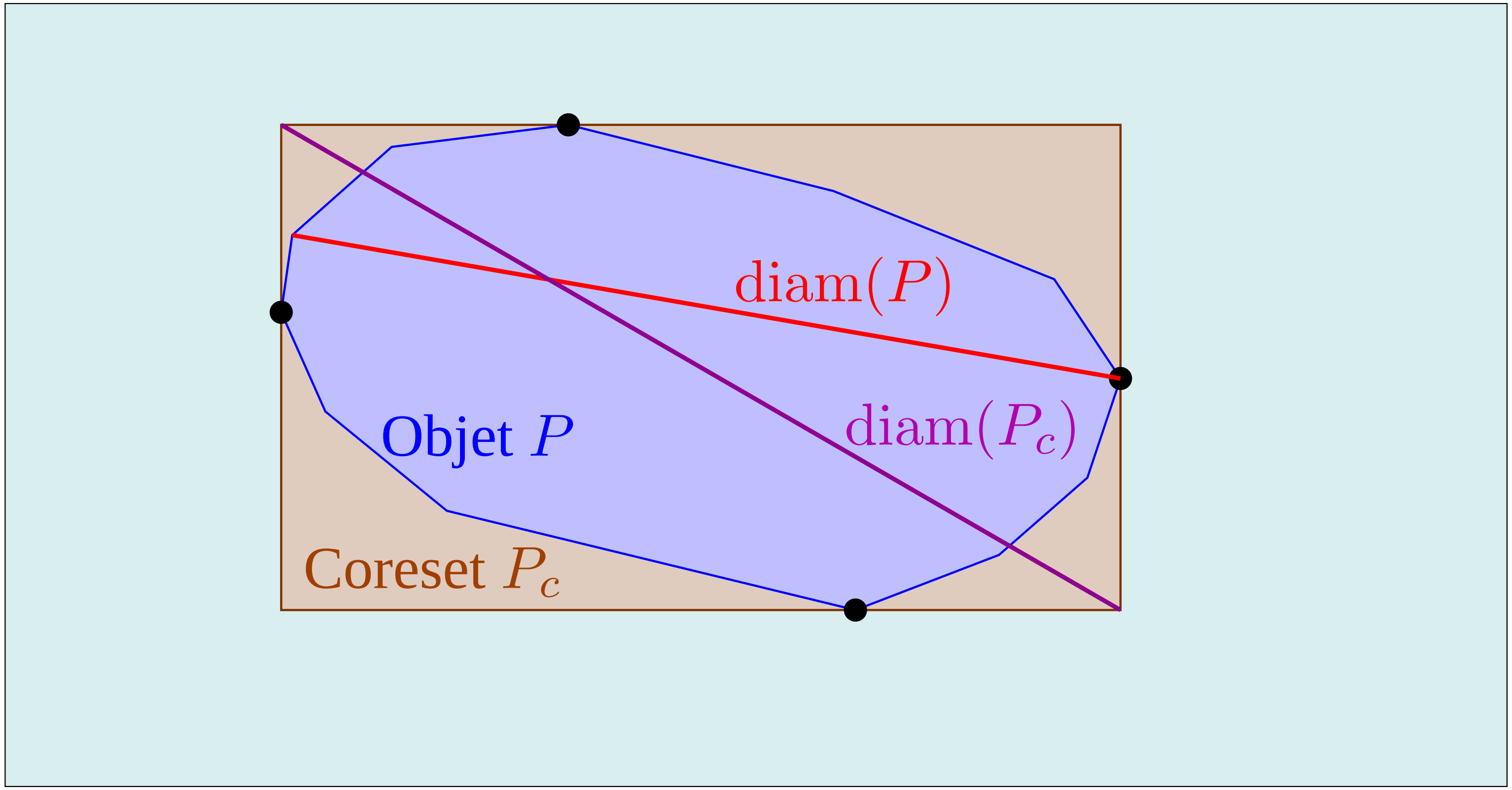
Coresets



- Souvent: algorithmes A et A_c connus.
- Reste à trouver un coreset P_c plus simple que P, et prouver que $f(P) \leqslant f(P_c) \leqslant cf(P)$.

Approximation du diamètre

Facteur $\sqrt{2}$



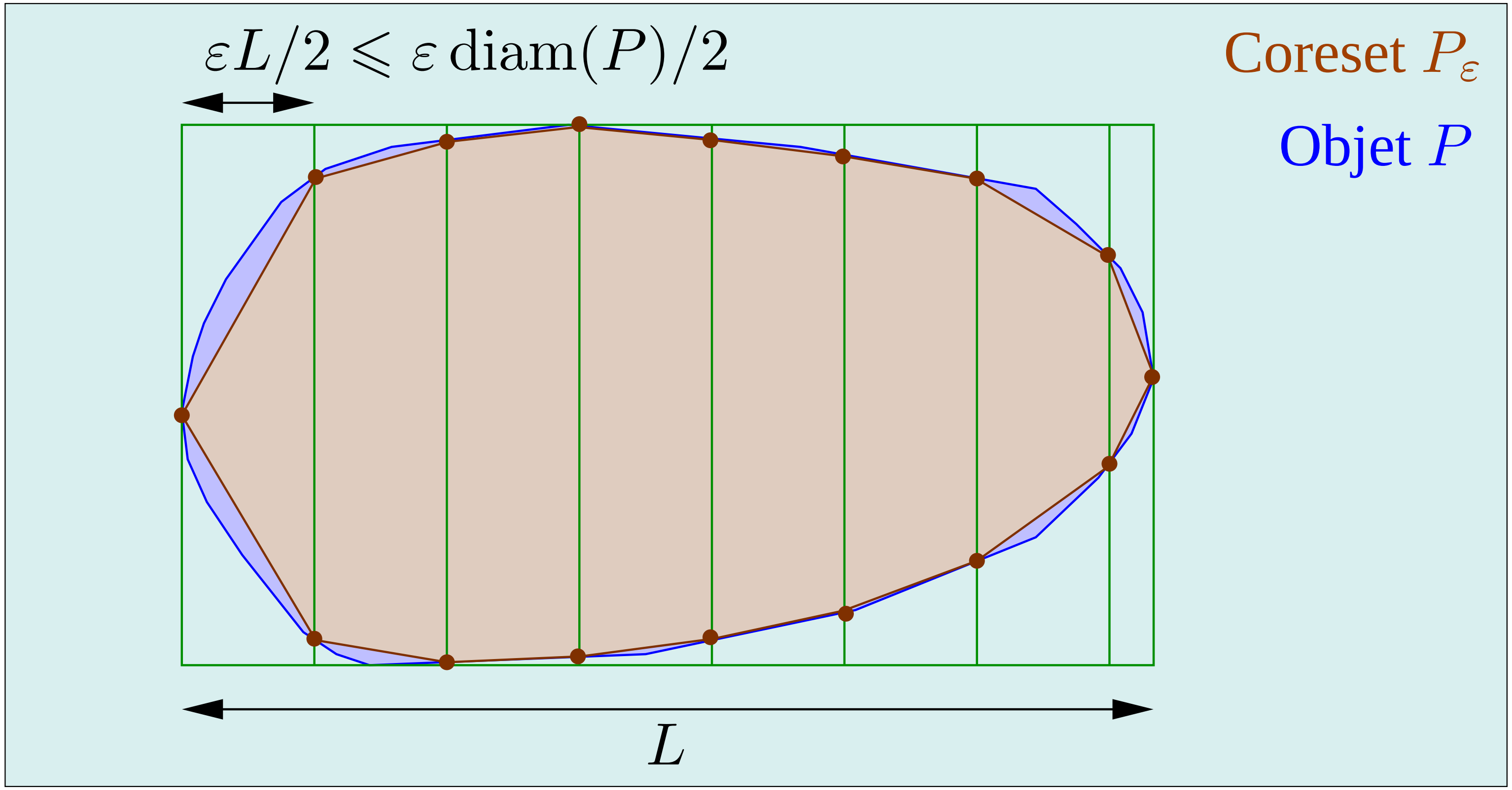
- $c = \sqrt{2}$ $\qquad \mathrm{diam}(P) \leqslant \mathrm{diam}(P_c) \leqslant \sqrt{2}\,\mathrm{diam}(P)$.
- P_c peut être calculé en temps $O(\log n)$: calcul de 4 points extrêmes.
- coreset de taille $O(1)$.

Distance

- Soient $P \subset Q \subset \mathbb{R}^2$
- On définit la distance (de Hausdorff) entre P et Q

$$\mathrm{d_h}(P, Q) = \max_{x \in Q} \left(\min_{y \in P} \mathrm{d}(x, y) \right).$$

Schéma d'approximation

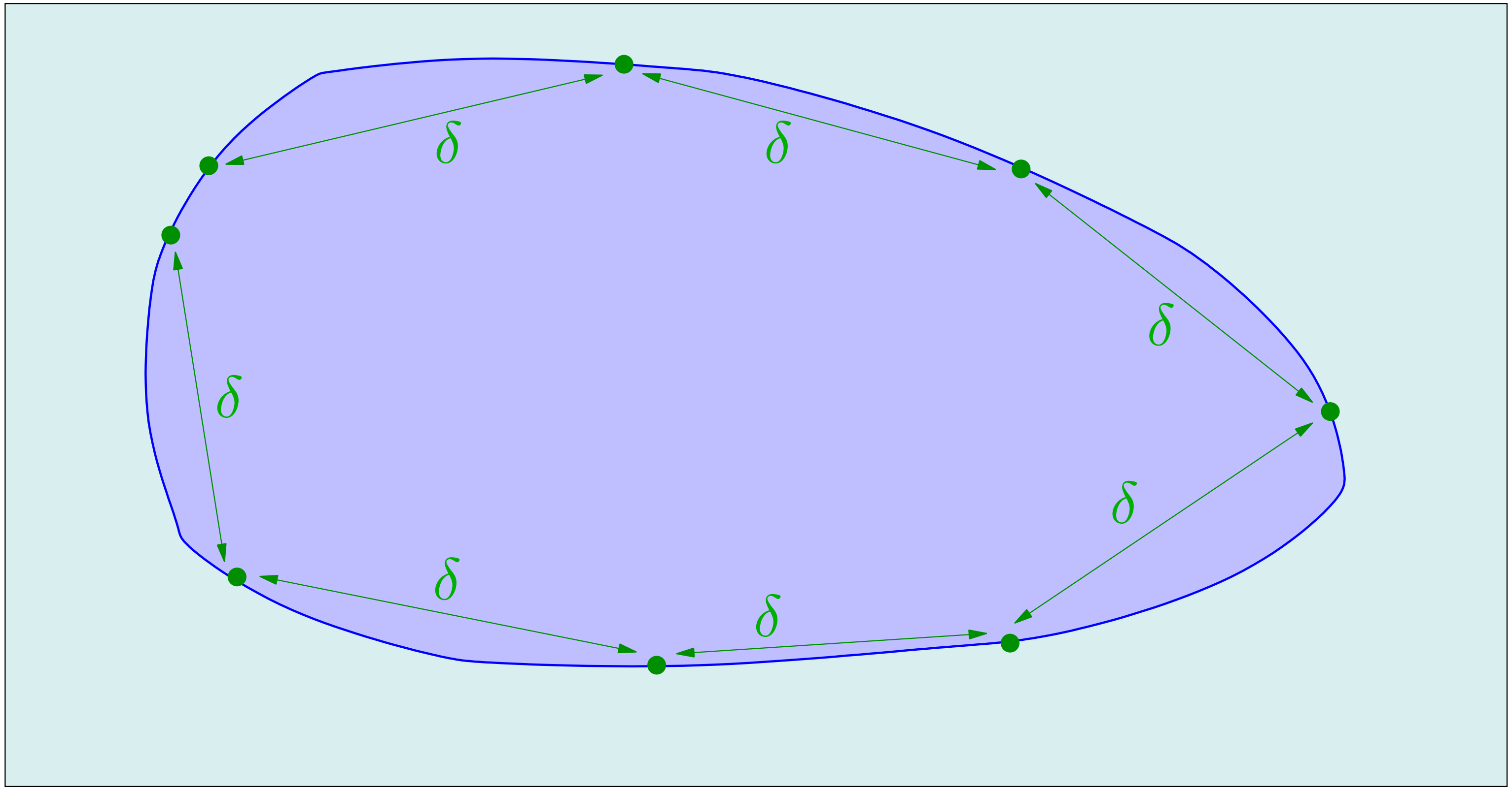


- $\mathrm{d_h}(P_\varepsilon, P) \leqslant \varepsilon\,\mathrm{diam}(P)/2$
- $(1-\varepsilon)\,\mathrm{diam}(P) \leqslant \mathrm{diam}(P_\varepsilon) \leqslant \mathrm{diam}(P)$
- Temps de calcul: $O\left(\dfrac{\log n}{\varepsilon}\right)$.

Méthode de Dudley

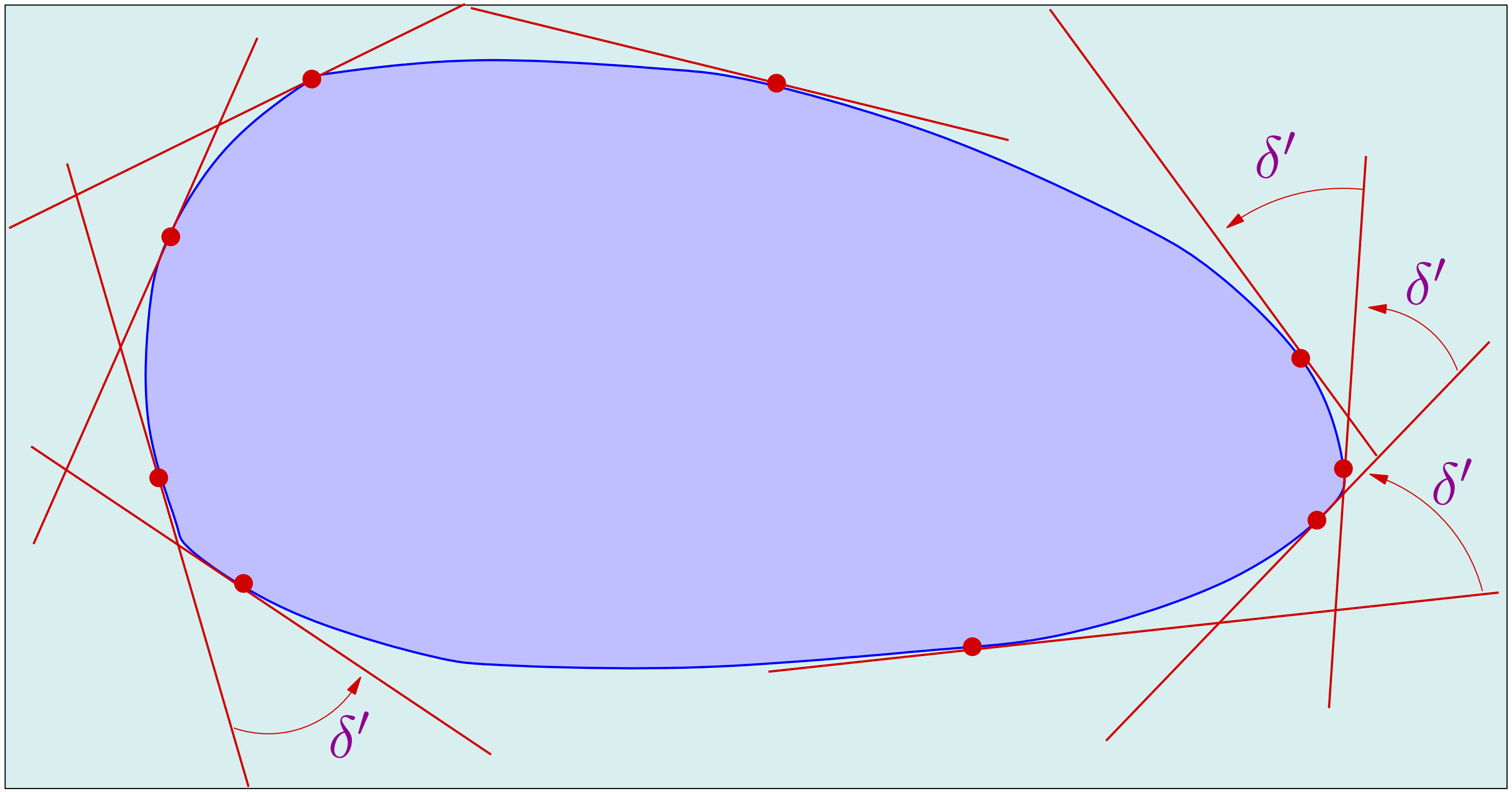
- La méthode de Dudley permet de construire un coreset pour le diamètre de plus petite taille: c'est un polygon à $O(1/\sqrt{\varepsilon})$ faces.
- Il peut (facilement) être calculé en temps $O\left(\frac{\log n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$.
- On peut donc calculer une $(1-\varepsilon)$-approximation du diamètre en temps $O\left(\frac{\log n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$.

Méthode de Dudley



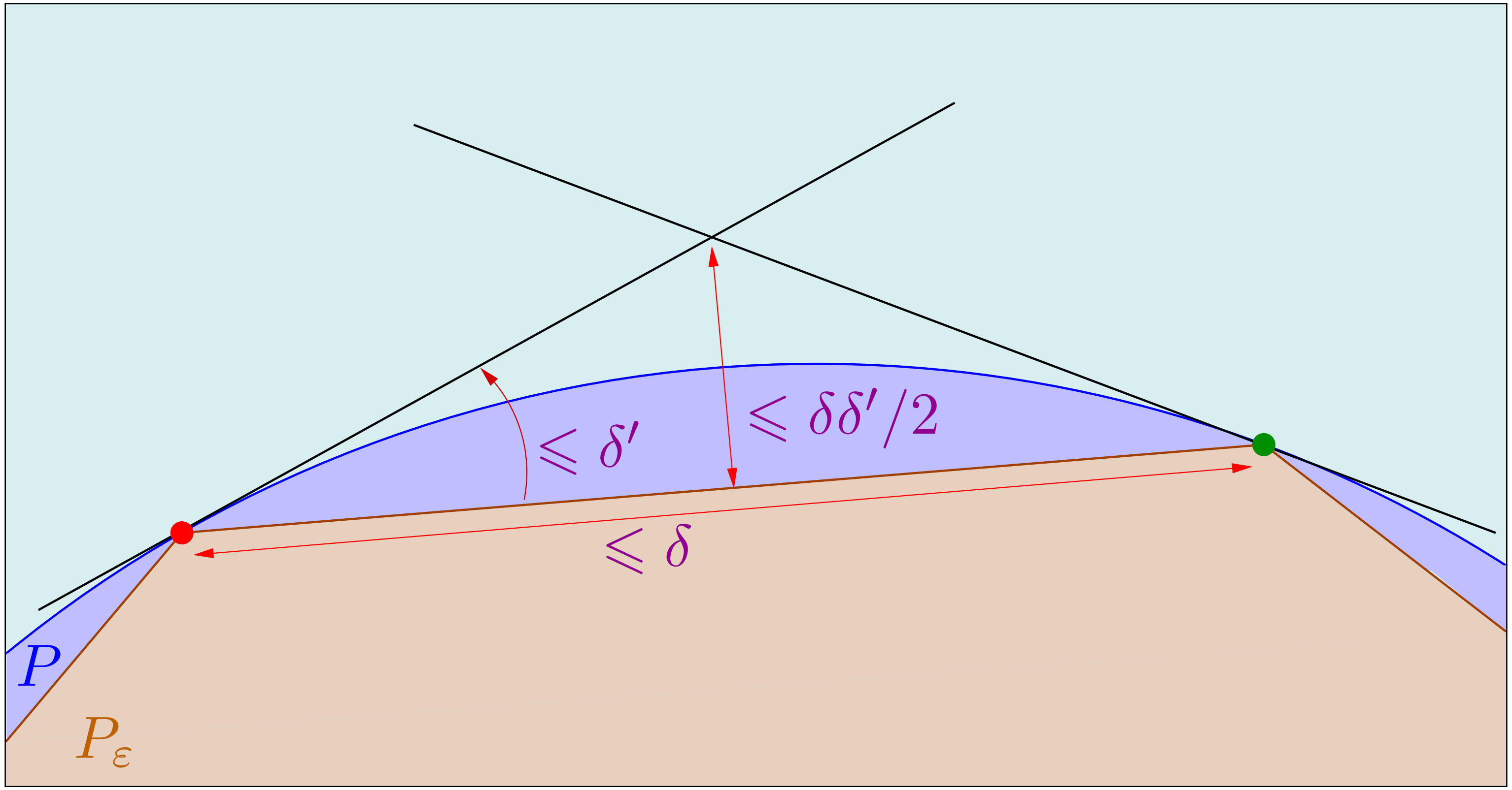
- Points verts: $\delta = \sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{diam}(P)$.
- Il y a $O(1/\sqrt{\varepsilon})$ points verts.

Méthode de Dudley



- Points rouges: $\delta' = 0.9\sqrt{\varepsilon}$.
- Il y a $O(1/\sqrt{\varepsilon})$ points rouges

Méthode de Dudley



- P_ε est l'enveloppe convexe des points verts et des points rouges.
- $\mathrm{d_h}(P_\varepsilon, P) \leqslant \delta \tan(\delta')/2 < \varepsilon\,\mathrm{diam}(P)/2$ pour ε suffisament petit.

Méthode de Dudley

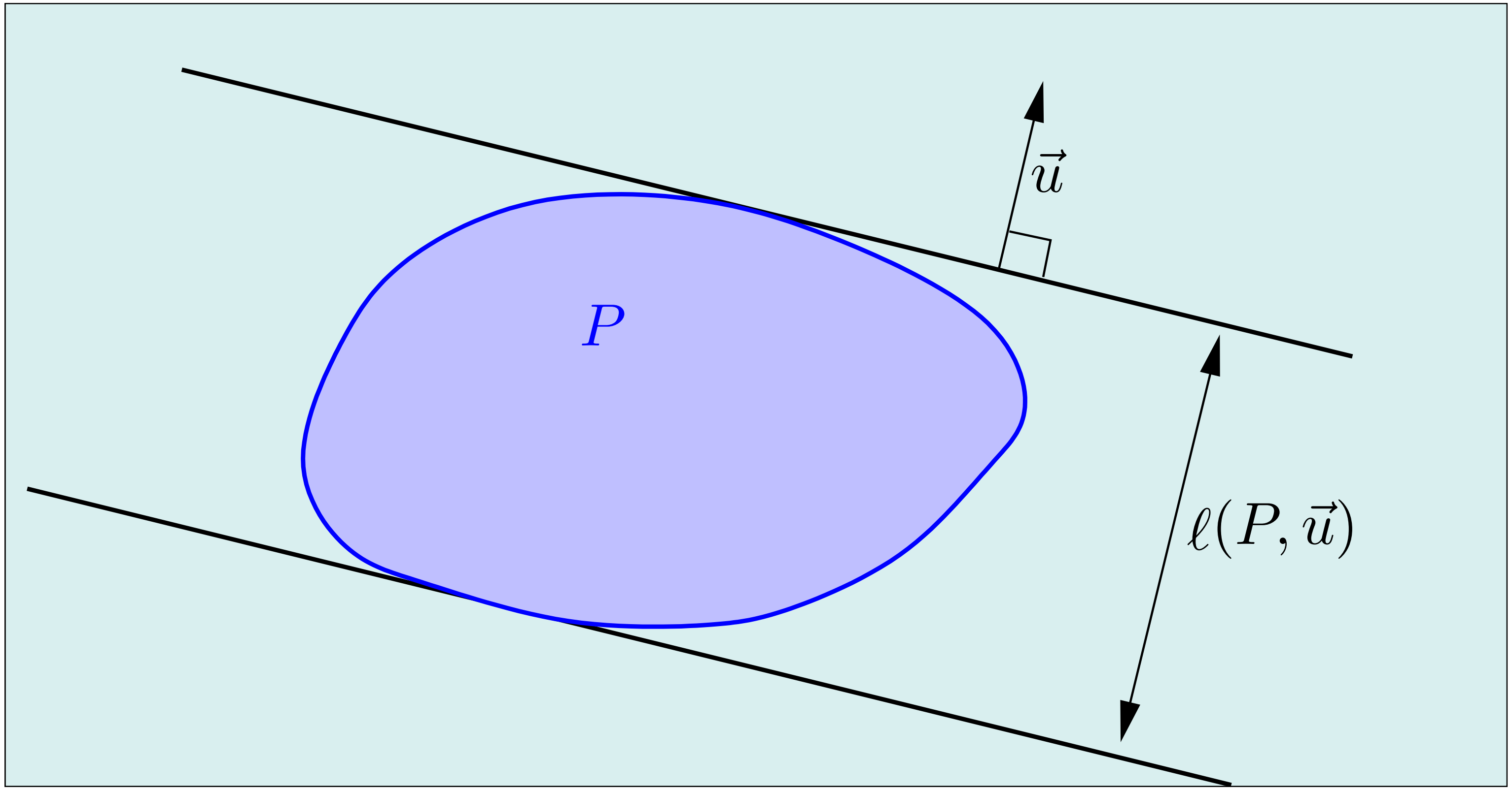
- $\mathrm{diam}(P_\varepsilon) \geqslant (1-\varepsilon)\mathrm{diam}(P)$
- On peut calculer P_ε en temps $O\left(\frac{\log n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$:
  1. Calcul d'une $\sqrt{2}$-approximation de $\mathrm{diam}(P)$ en temps $O(\log n)$.
  2. Calcul de P_ε en temps $O\left(\frac{\log n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$.
- Conclusion: on peut calculer une $(1-\varepsilon)$-approximation de $\mathrm{diam}(P)$ en temps $O\left(\frac{\log n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$.

Généralisation

Autres problèmes

- La méthode de Dudley permet aussi d'approximer:
  - Le périmètre
  - Le disque couvrant minimal
- mais pas
  - L'aire
  - La largeur
  - Le rectangle couvrant minimal
- On va présenter une modification de la méthode de Dudley qui permet de traiter ces problèmes.

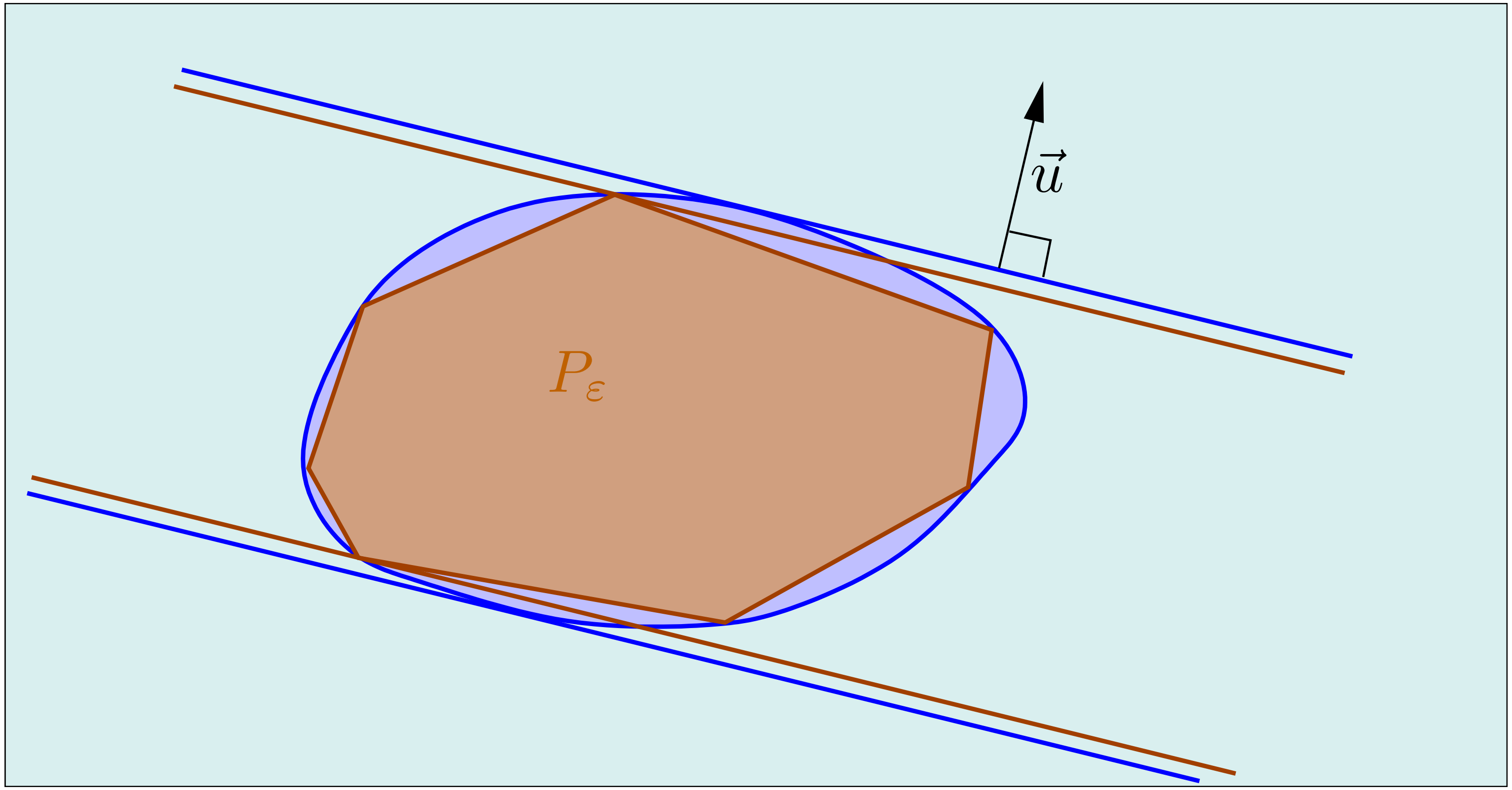
Largeur directionnelle



- Largeur directionnelle:

$$\ell(P, \vec{u}) = \max_{x \in P} \left(\overrightarrow{Ox}.\vec{u} \right) - \min_{x \in P} \left(\overrightarrow{Ox}.\vec{u} \right)$$

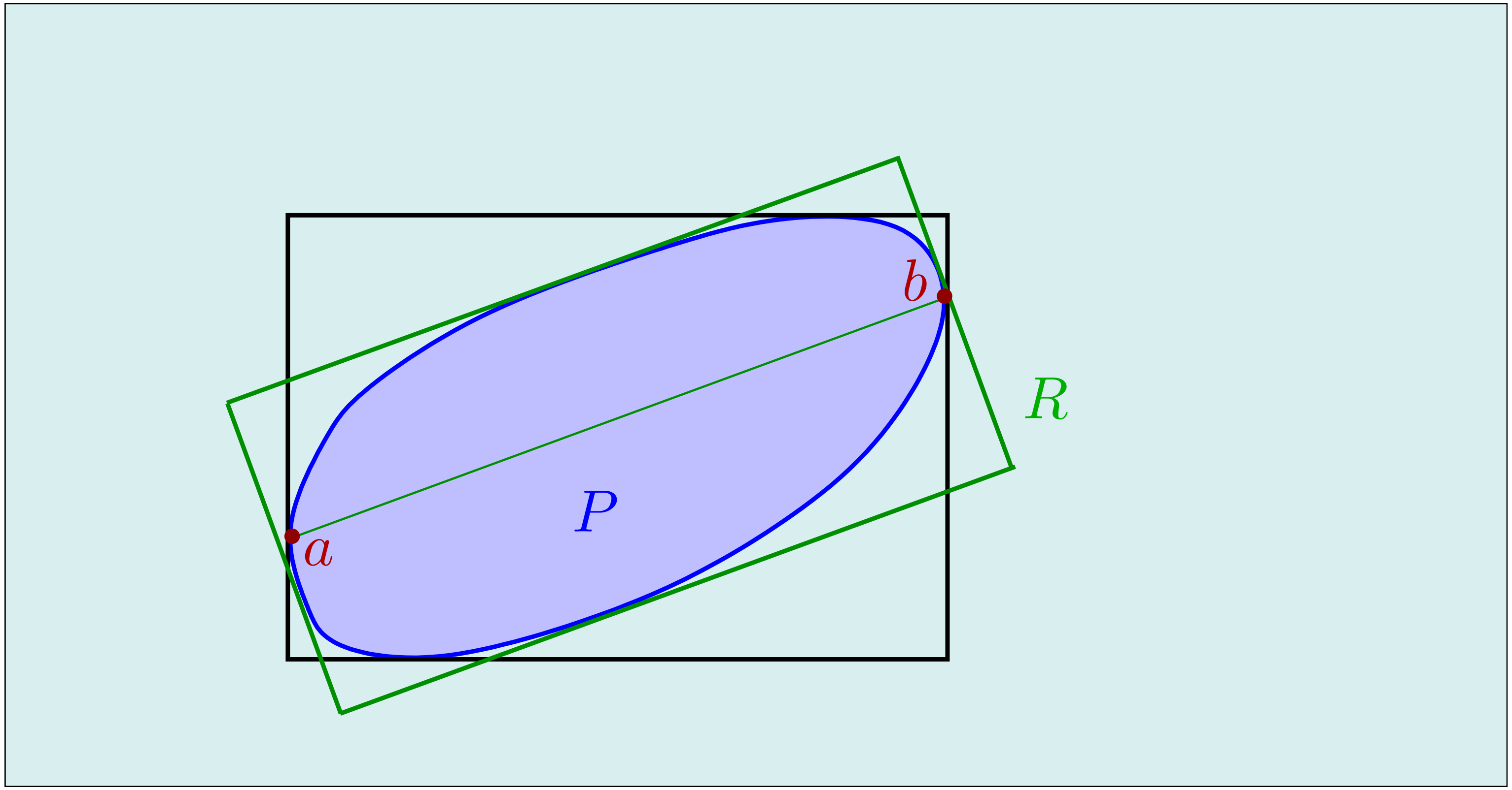
Largeur directionnelle



- On veut trouver $P_\varepsilon \subset P$ tel que

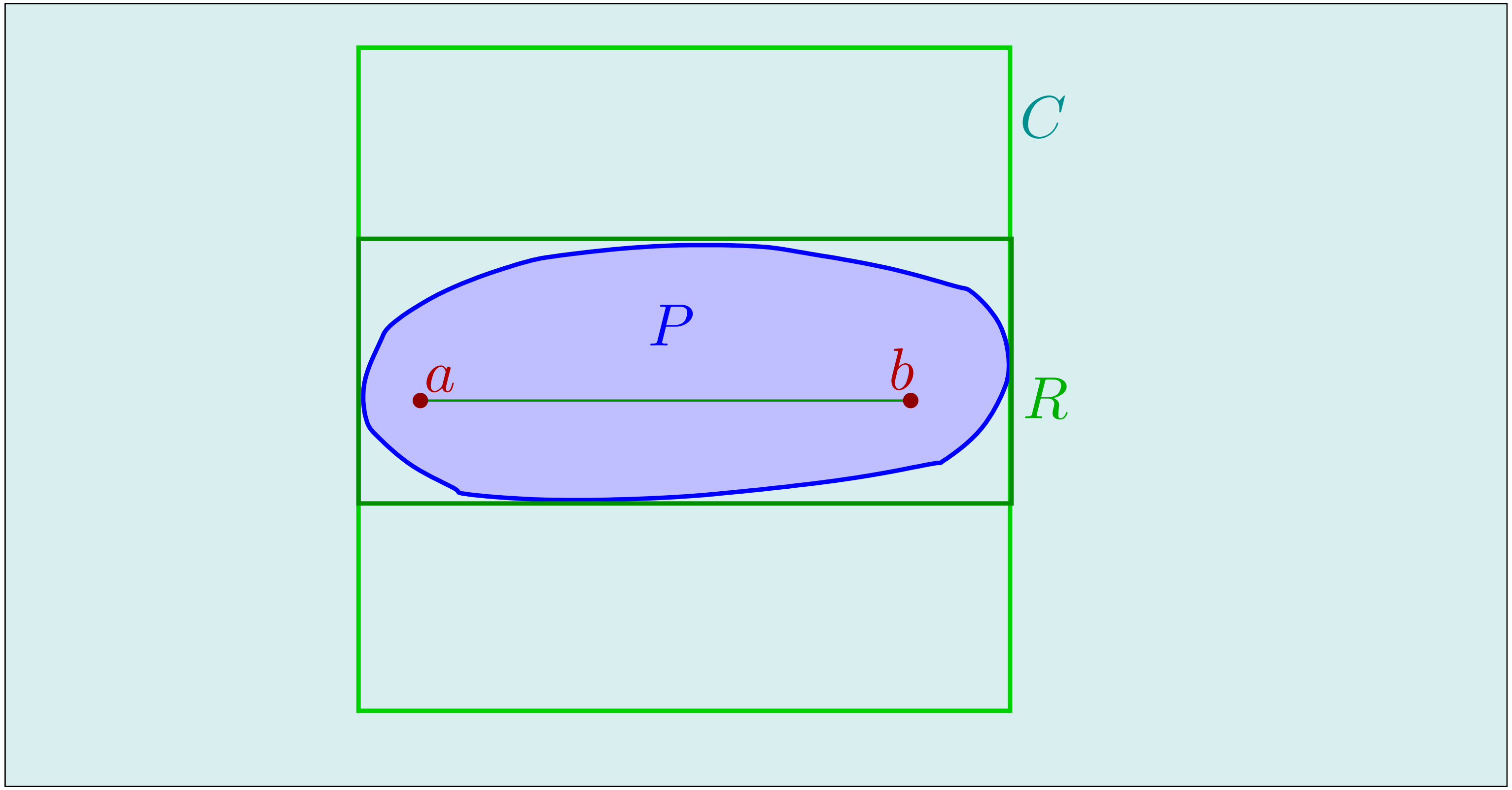
$$\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2,\;\; \ell\left(P_\varepsilon, \vec{u}\right) \geqslant (1-\varepsilon)\,\ell\left(P, \vec{u}\right).$$

Élargissement



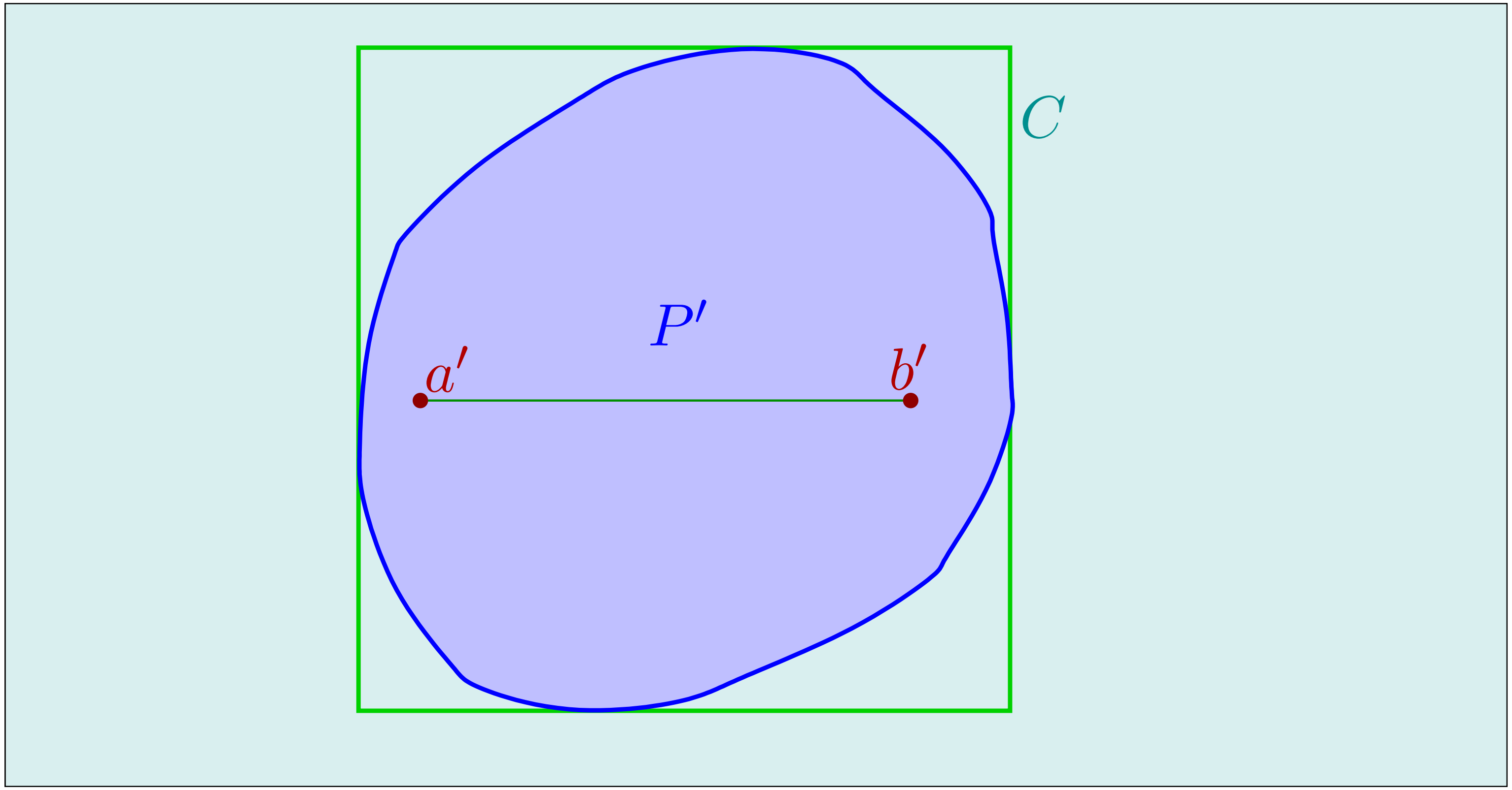
- $\mathrm{d}(a, b) \geqslant \mathrm{diam}(P)/\sqrt{2}$.

Élargissement



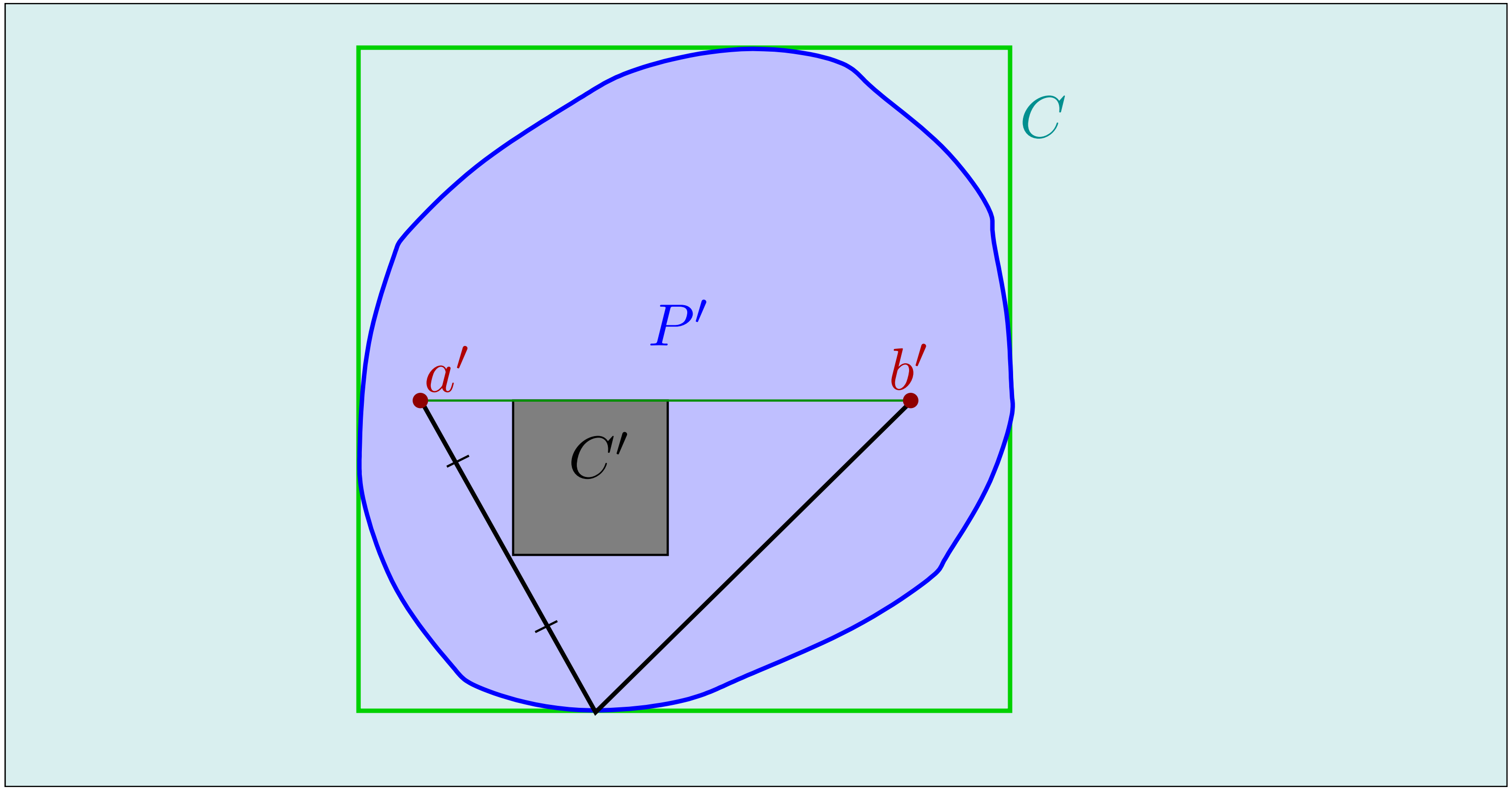
- $\mathrm{d}(a,b) \geqslant \mathrm{diam}(P)/\sqrt{2} \geqslant \mathrm{longueur}(R)/\sqrt{2}$

Élargissement



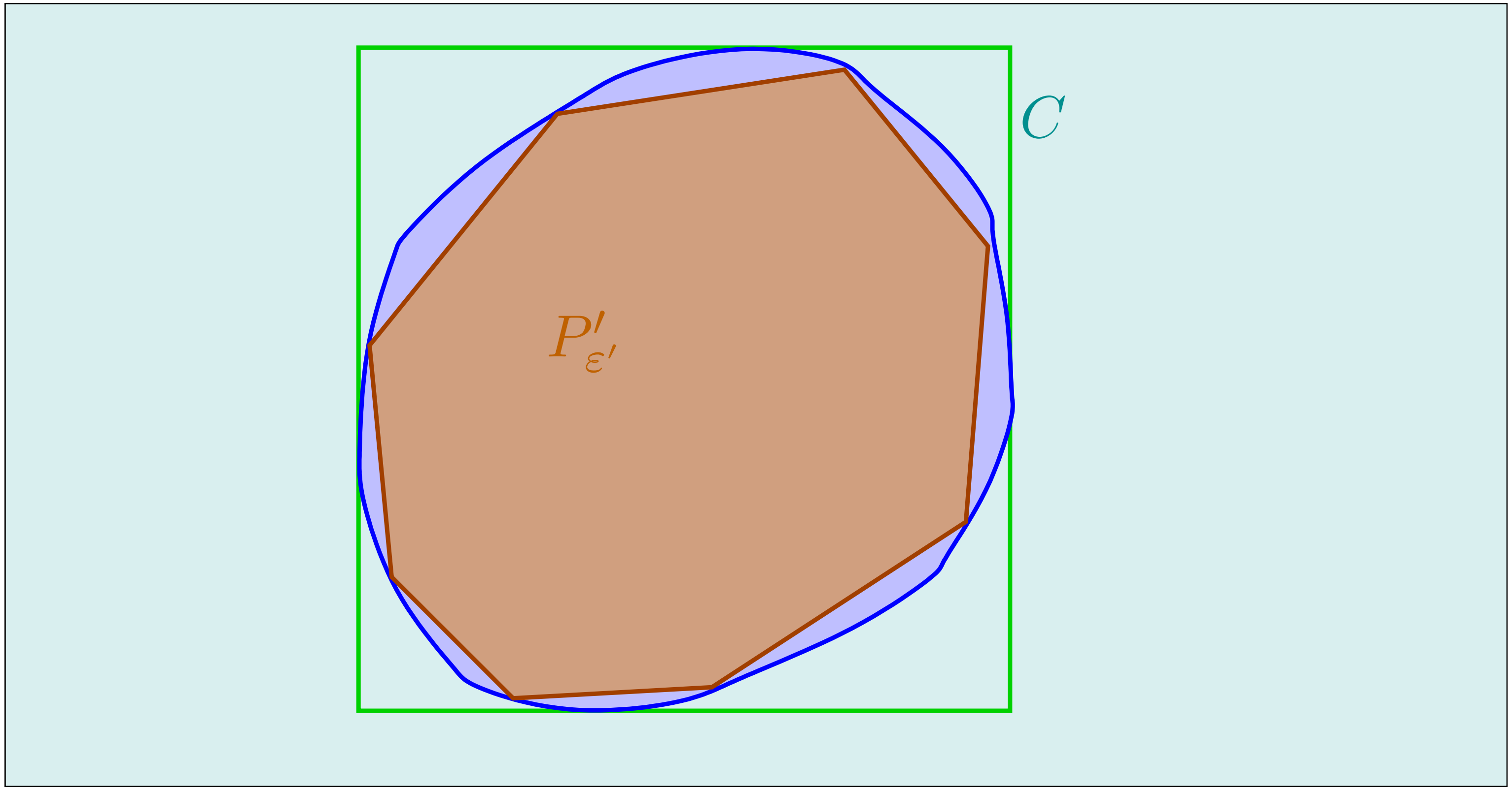
- On applique une affinité orthogonale pour transformer R en un carré C.
- $\mathrm{d}(a', b') \geqslant \mathrm{longueur}(C)/\sqrt{2} \geqslant \mathrm{diam}(P')/2$

Élargissement



- P' contient un carré C' de côté au moins $\mathrm{d}(a',b')/2$.
- $\Longrightarrow \forall \vec{u},\ \ \ell(P',\vec{u}) \geqslant \dfrac{1}{2}\mathrm{d}(a',b') \geqslant \dfrac{1}{4}\mathrm{diam}(P')$

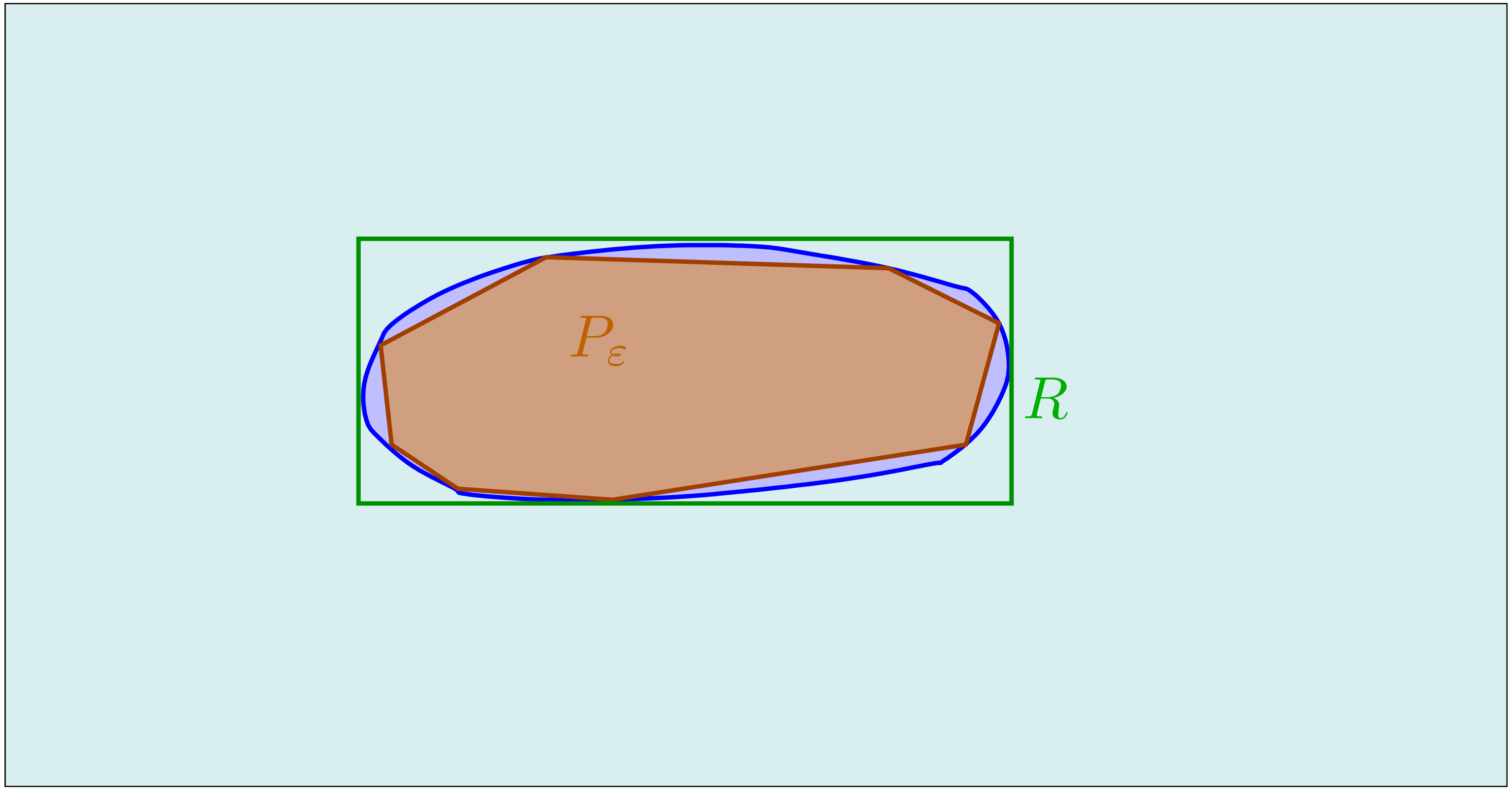
Élargissement



- On applique la méthode de Dudley avec $\varepsilon' = \varepsilon/4$.

$$\forall \vec{u},\ \ \ell(P'_{\varepsilon'}, \vec{u}) \geqslant \ell(P', \vec{u}) - \frac{\varepsilon}{4}\,\mathrm{diam}(P') \geqslant (1-\varepsilon)\,\ell(P', \vec{u}).$$

Élargissement



- On applique l'inverse de l'affinité précédente, et on obtient P_ε.
- On conclut que $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^2,\ \ \ell(P_\varepsilon, \vec{u}) \geqslant (1-\varepsilon)\,\ell(P, \vec{u})$.

Applications

- On peut calculer P_ε en temps $O\left(\frac{\log n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$.
- C'est un coreset pour les problèmes suivants
  - Le périmètre
  - Le disque couvrant minimal
  - L'aire
  - La largeur
  - Le rectangle couvrant minimal
- Conclusion: il existe un algorithme d'approximation pour ces problèmes en temps $O\left(\frac{\log n}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$.