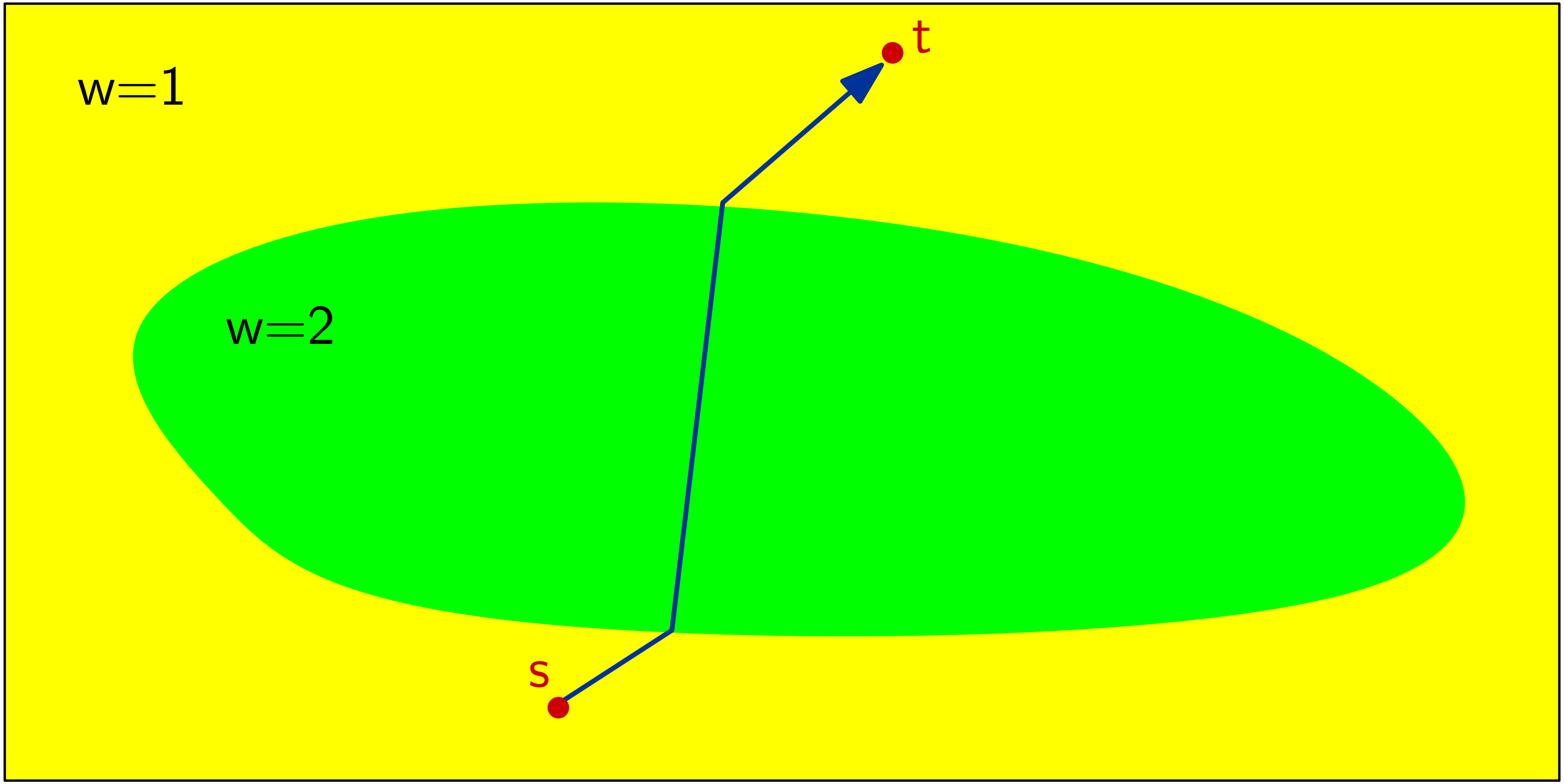
Approximation du plus court chemin dans des régions anisotropes

Siu-Wing Cheng (HKUST)
Hyeon-Suk Na (Soongsil University)
Antoine Vigneron (INRA Jouy-en-Josas)
Yajun Wang (HKUST)

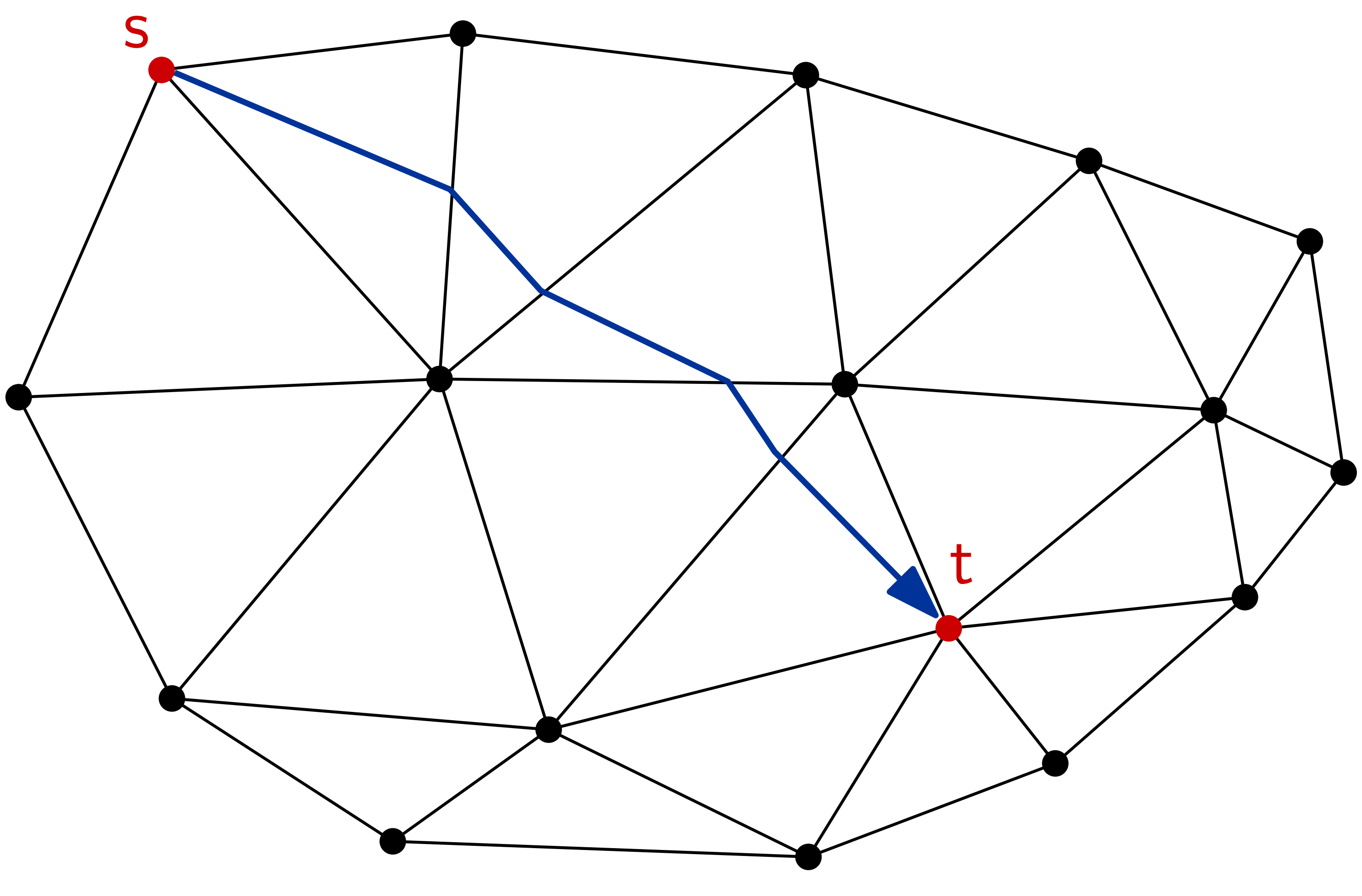
Plus court chemin dans des régions pondérées

coût = poids $\times$ longueur



Plus court chemin

- Triangulation avec n sommets
- Chaque face a un poids
- Plus court chemin approché dont le coût est au plus $1 + \epsilon$ fois le minimum



but: FPTAS

but: FPTAS

Bornes connues: polynomiales en n, $1/\epsilon$, et dépendent d'autres paramètres.

but: FPTAS

Bornes connues: polynomiales en n, $1/\epsilon$, et dépendent d'autres paramètres.

- ρ: poids maximum / poids minimum
- θ: angle minimum dans la triangulation

but: FPTAS

Bornes connues: polynomiales en n, $1/\epsilon$, et dépendent d'autres paramètres.

- ρ: poids maximum / poids minimum
- θ: angle minimum dans la triangulation

Résultats connus

- Mitchell et Papadimitriou (1987): $O(n^8 \log(nN\rho/\epsilon))$
- Aleksandrov, Maheshwari, et Sacks: $O(Cn/\sqrt{\epsilon} \times \mathrm{polylog}(n, 1/\epsilon))$, C dépend de ρ, θ et d'autres paramètres.
- Sun et Reif: $O(C'n/\epsilon \times \mathrm{polylog}(n, 1/\epsilon))$, C' dépend de θ, autres paramètres, mais pas ρ.

but: FPTAS

Bornes connues: polynomiales en n, $1/\epsilon$, et dépendent d'autres paramètres.

- ρ: poids maximum / poids minimum
- θ: angle minimum dans la triangulation

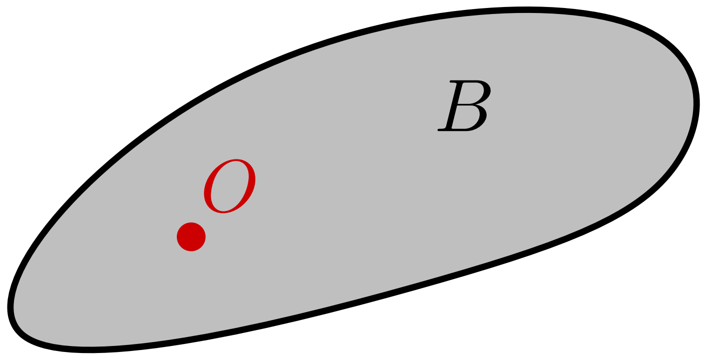
Résultats connus

- Mitchell et Papadimitriou (1987): $O(n^8 \log(nN\rho/\epsilon))$
- Aleksandrov, Maheshwari, et Sacks: $O(Cn/\sqrt{\epsilon} \times \text{polylog}(n, 1/\epsilon))$, C dépend de ρ, θ et d'autres paramètres.
- Sun et Reif: $O(C'n/\epsilon \times \text{polylog}(n, 1/\epsilon))$, C' dépend de θ, autres paramètres, mais pas ρ.

Notre algorithme: $O(n^3\rho/\epsilon \times \text{polylog}(n, \rho, 1/\epsilon))$

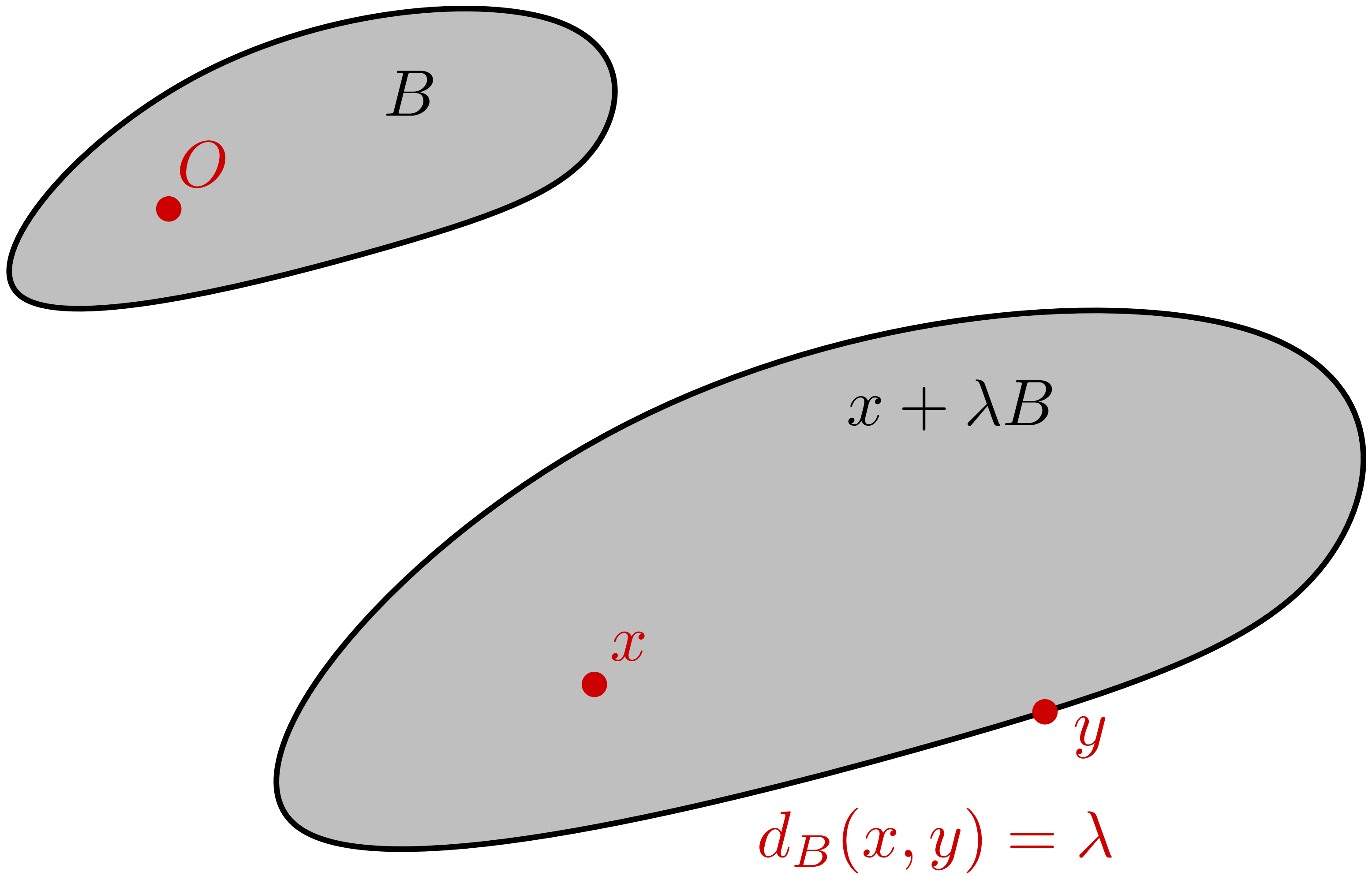
Distance convexe

Boule unité B: ensemble des points à distance ≤ 1 de O



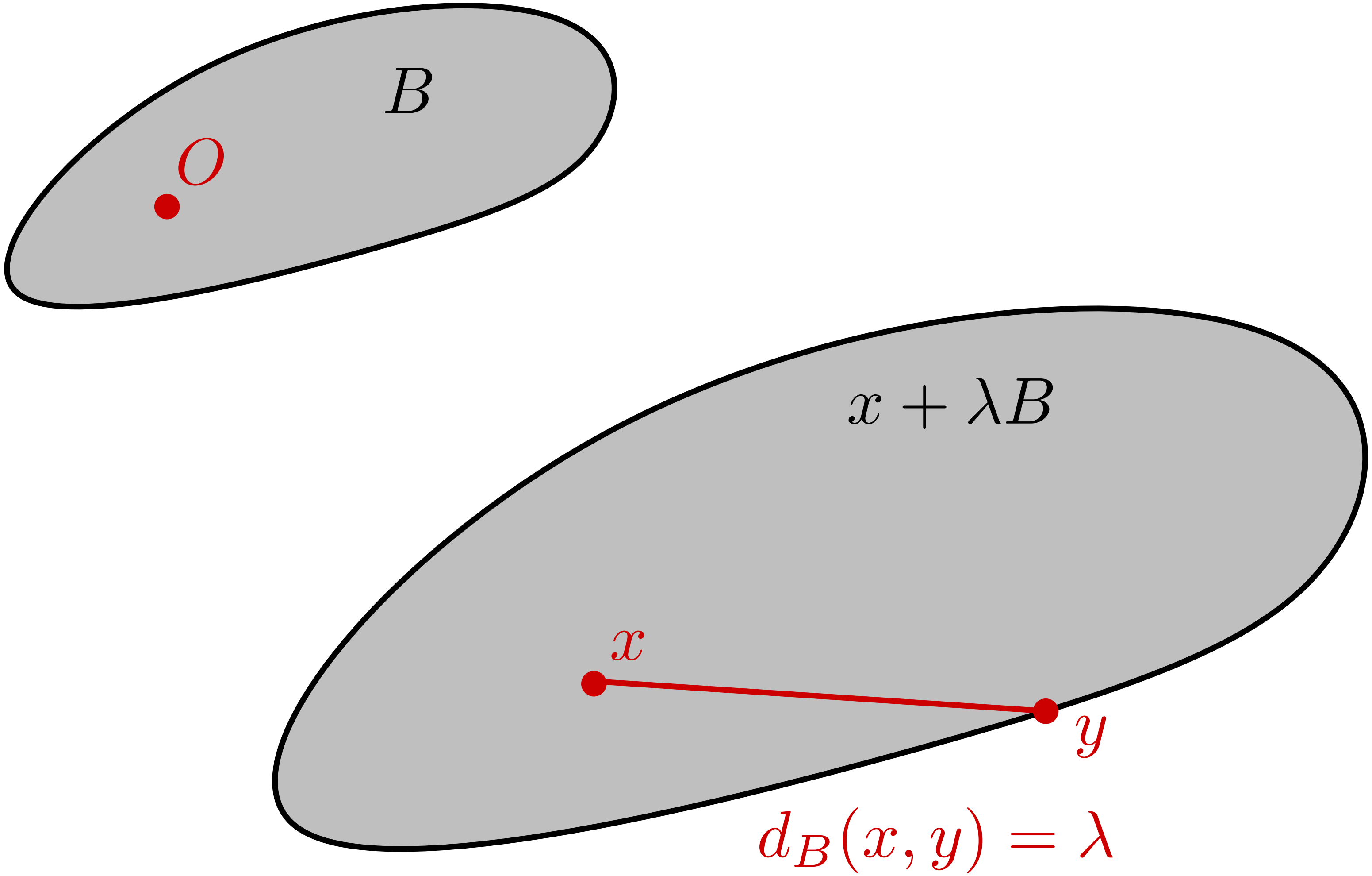
Distance convexe

Boule unité B: ensemble des points à distance ≤ 1 de O



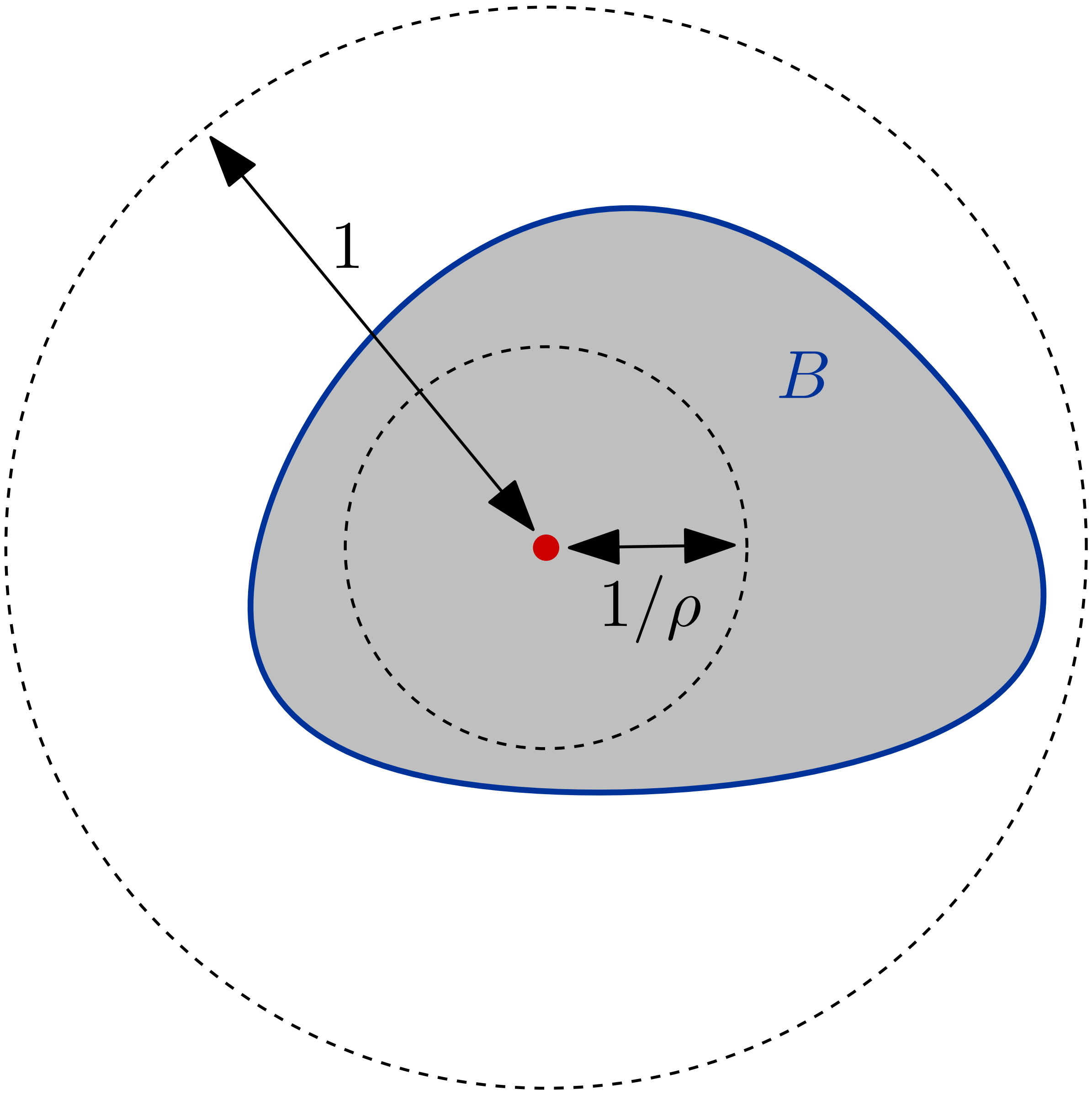
Distance convexe

Boule unité B: ensemble des points à distance ≤ 1 de O



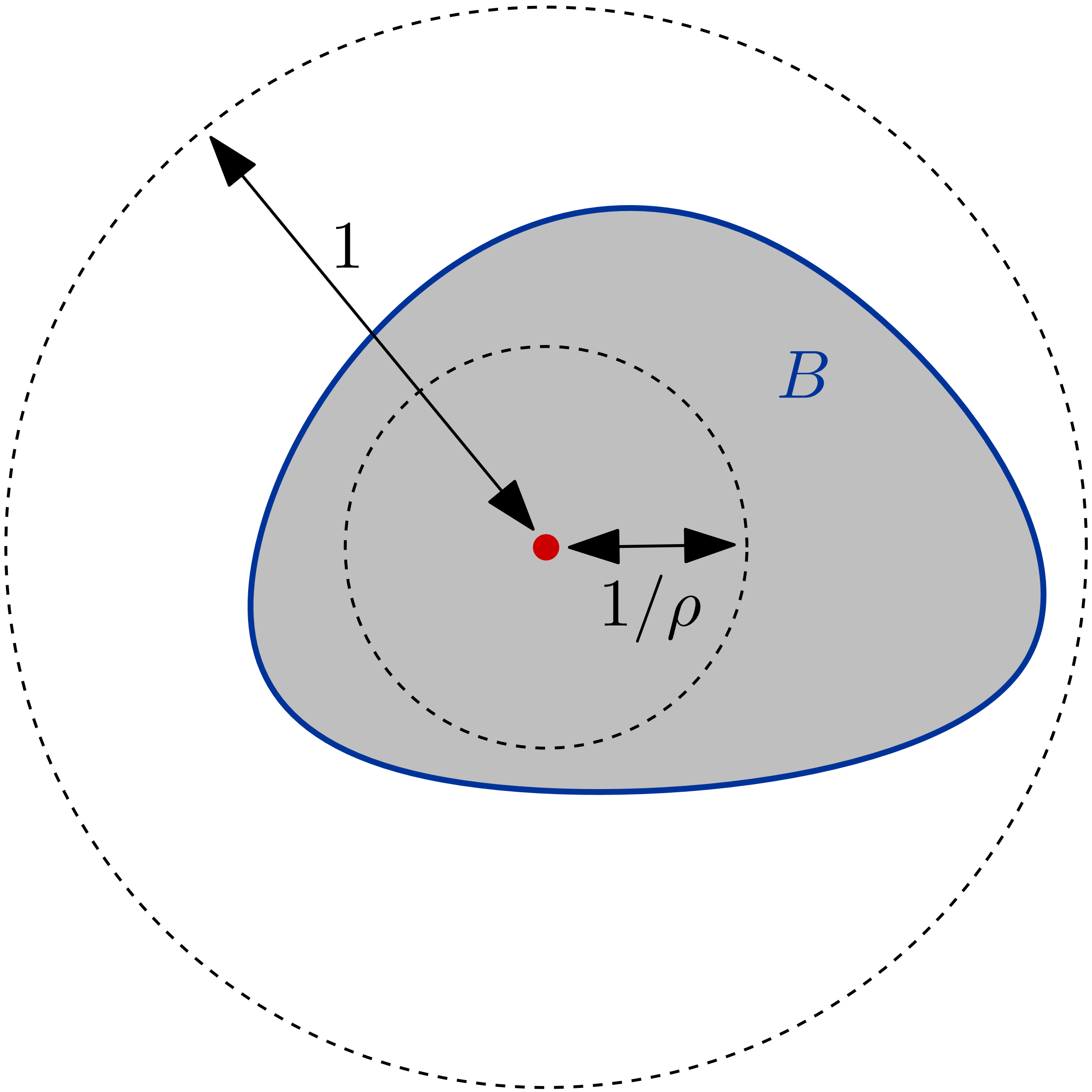
Le plus court chemin est un segment de droite

Modèle



Une distance convexe
par face

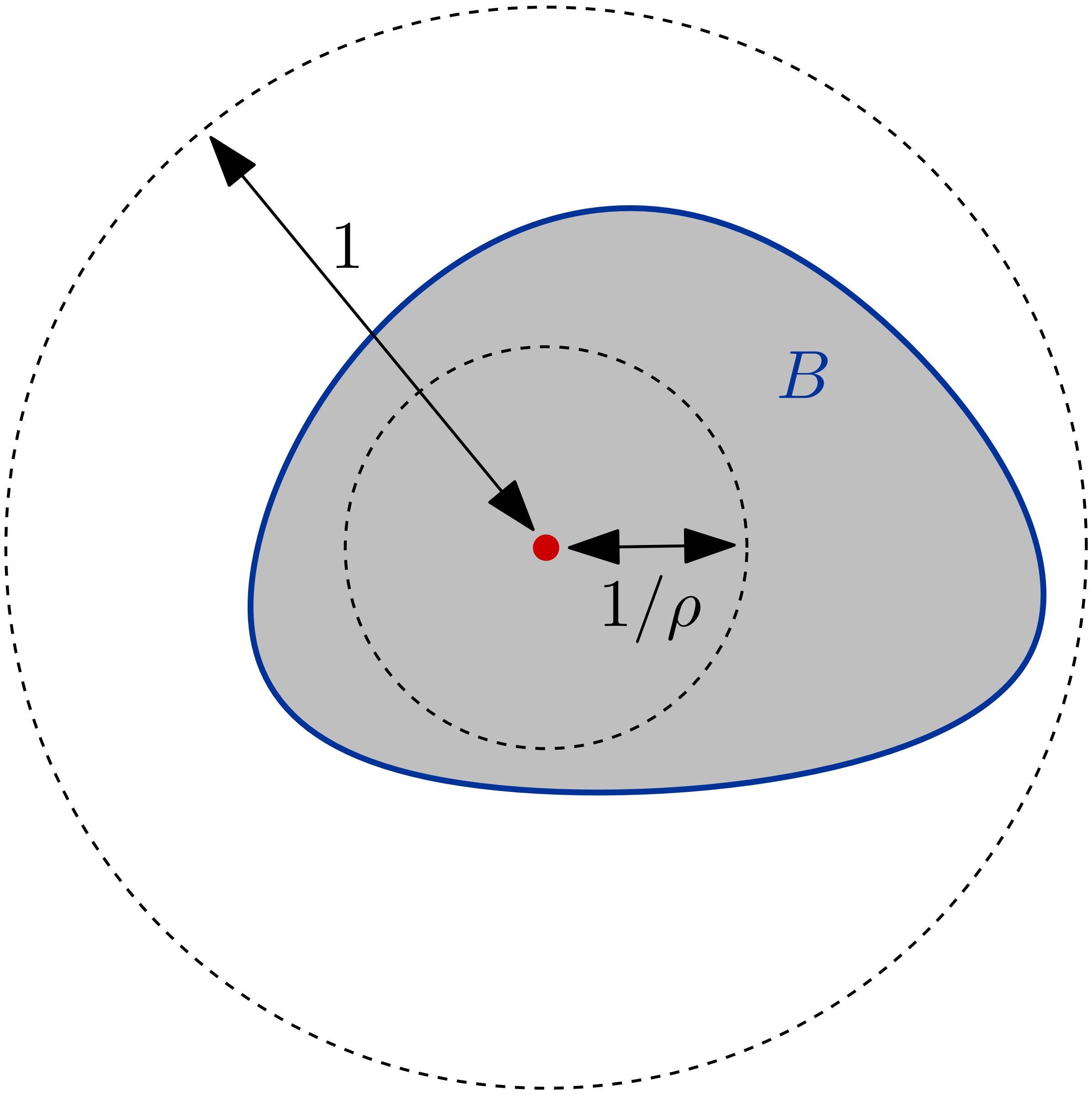
Modèle



Une distance convexe par face

La vitesse est dans l'intervalle $[1/\rho, 1]$

Modèle



Une distance convexe par face

La vitesse est dans l'intervalle $[1/\rho, 1]$

Le coût d'un chemin de longueur 1 est dans $[1, \rho]$.

Résultat

temps $O(\rho^2 n^3/\epsilon^2 \times \mathrm{polylog}(n, \rho, 1/\epsilon))$

Approche

Résultat

temps $O(\rho^2 n^3/\epsilon^2 \times \mathrm{polylog}(n, \rho, 1/\epsilon))$

Approche

On donne un algorithme en temps $O(nk\rho/\epsilon \times \mathrm{polylog})$ pour trouver une $(1+\epsilon)$-approximation du plus court chemin à k arêtes.

Résultat

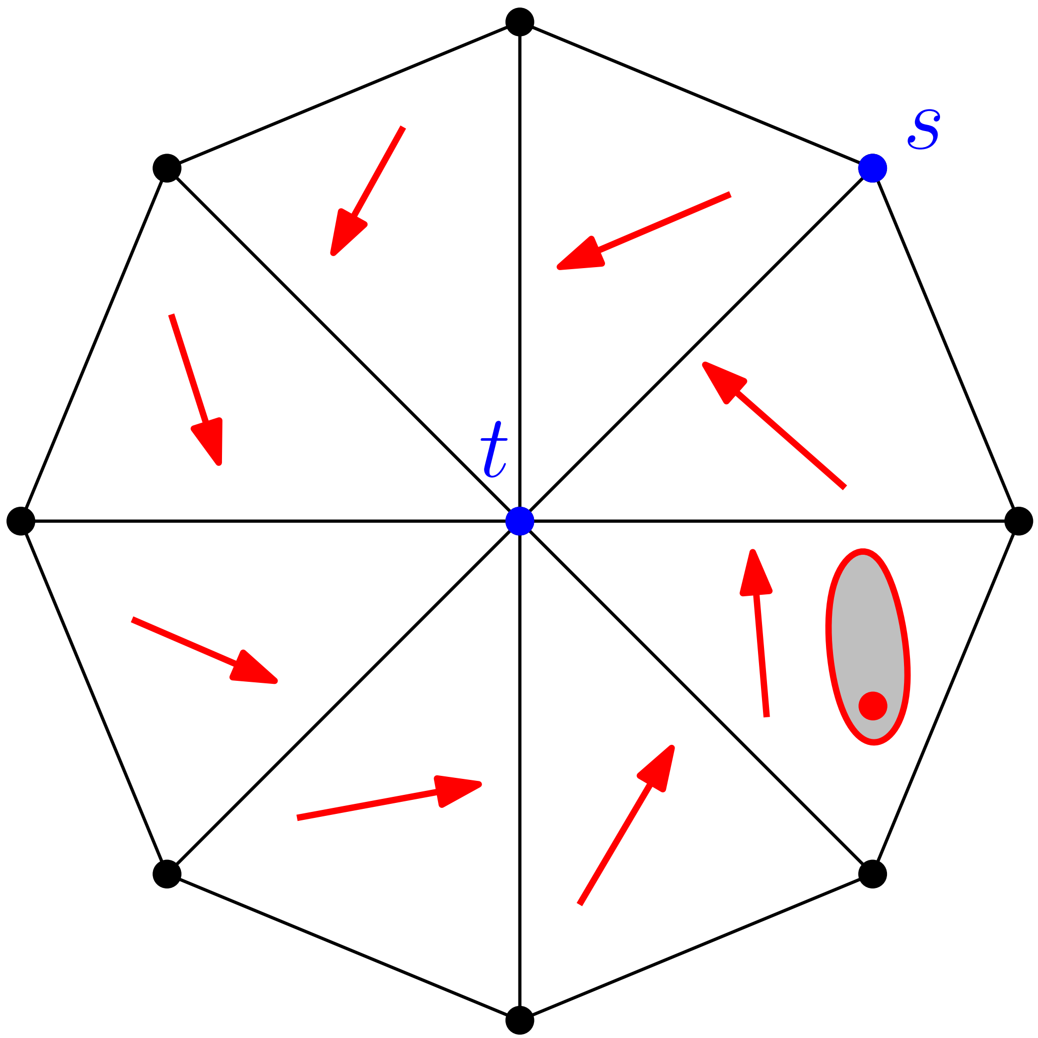
temps $O(\rho^2 n^3/\epsilon^2 \times \mathrm{polylog}(n, \rho, 1/\epsilon))$

Approche

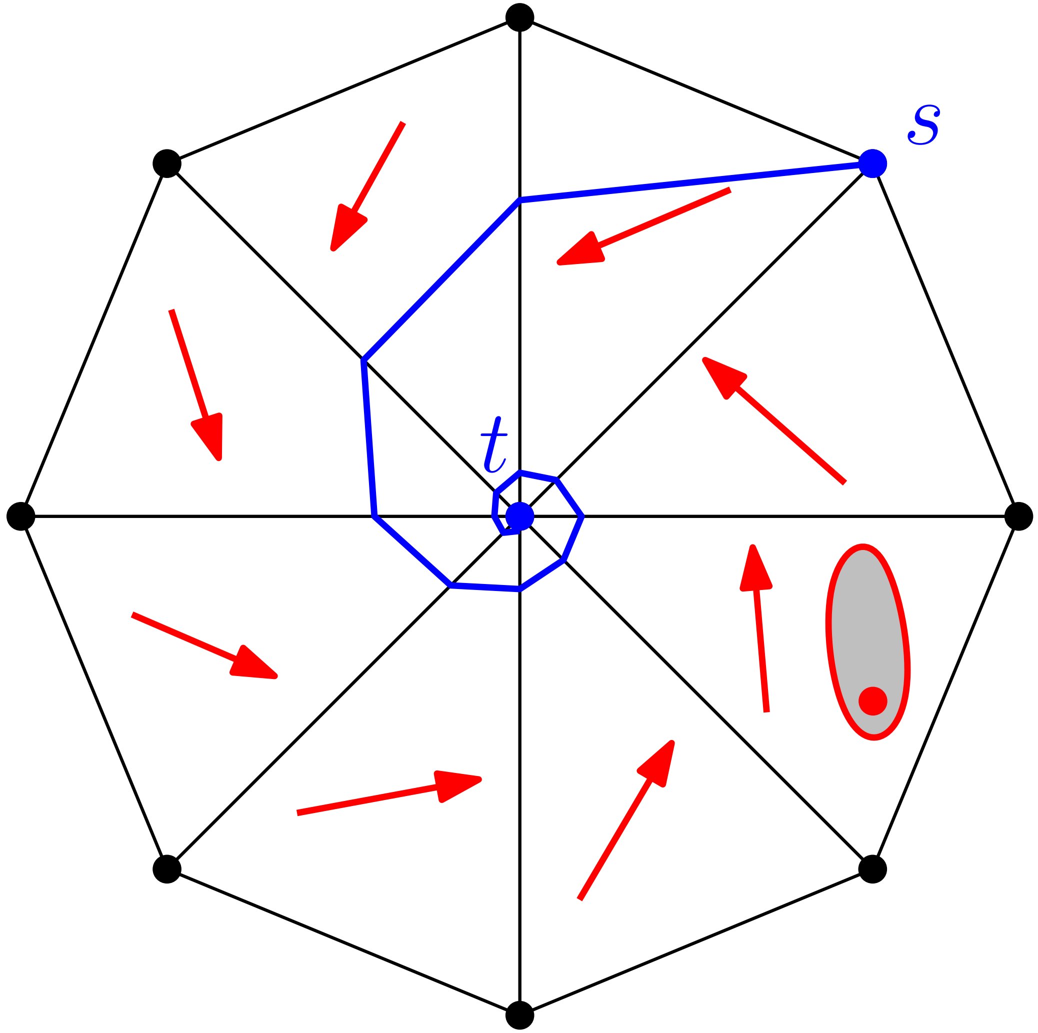
On donne un algorithme en temps $O(nk\rho/\epsilon \times \mathrm{polylog})$ pour trouver une $(1+\epsilon)$-approximation du plus court chemin à k arêtes.

On montre qu'il existe un chemin à $O(n^2\rho/\epsilon)$ arêtes dont le coût est une $(1+\epsilon)$-approximation de l'optimal.

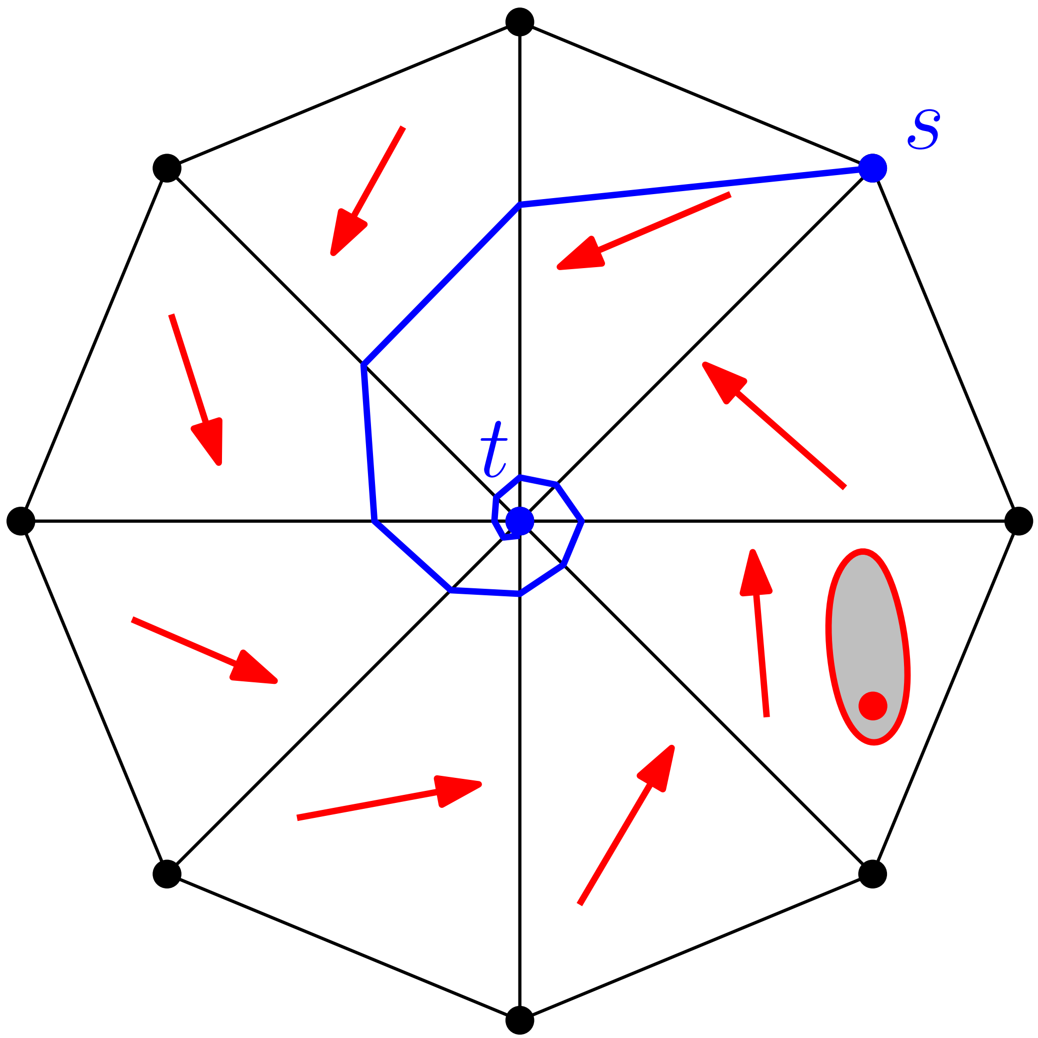
Exemple de plus court chemin non polygonal



Exemple de plus court chemin non polygonal

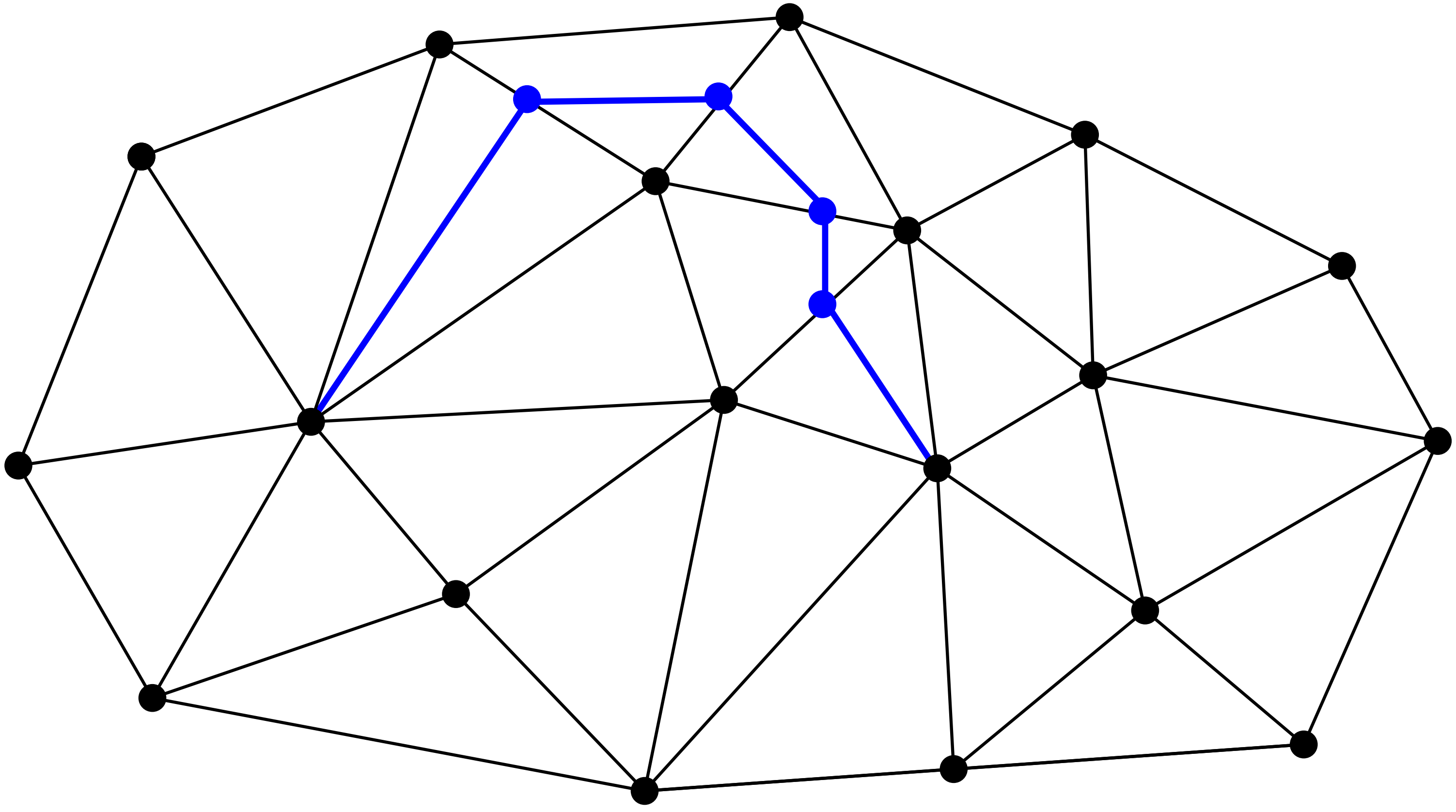


Exemple de plus court chemin non polygonal



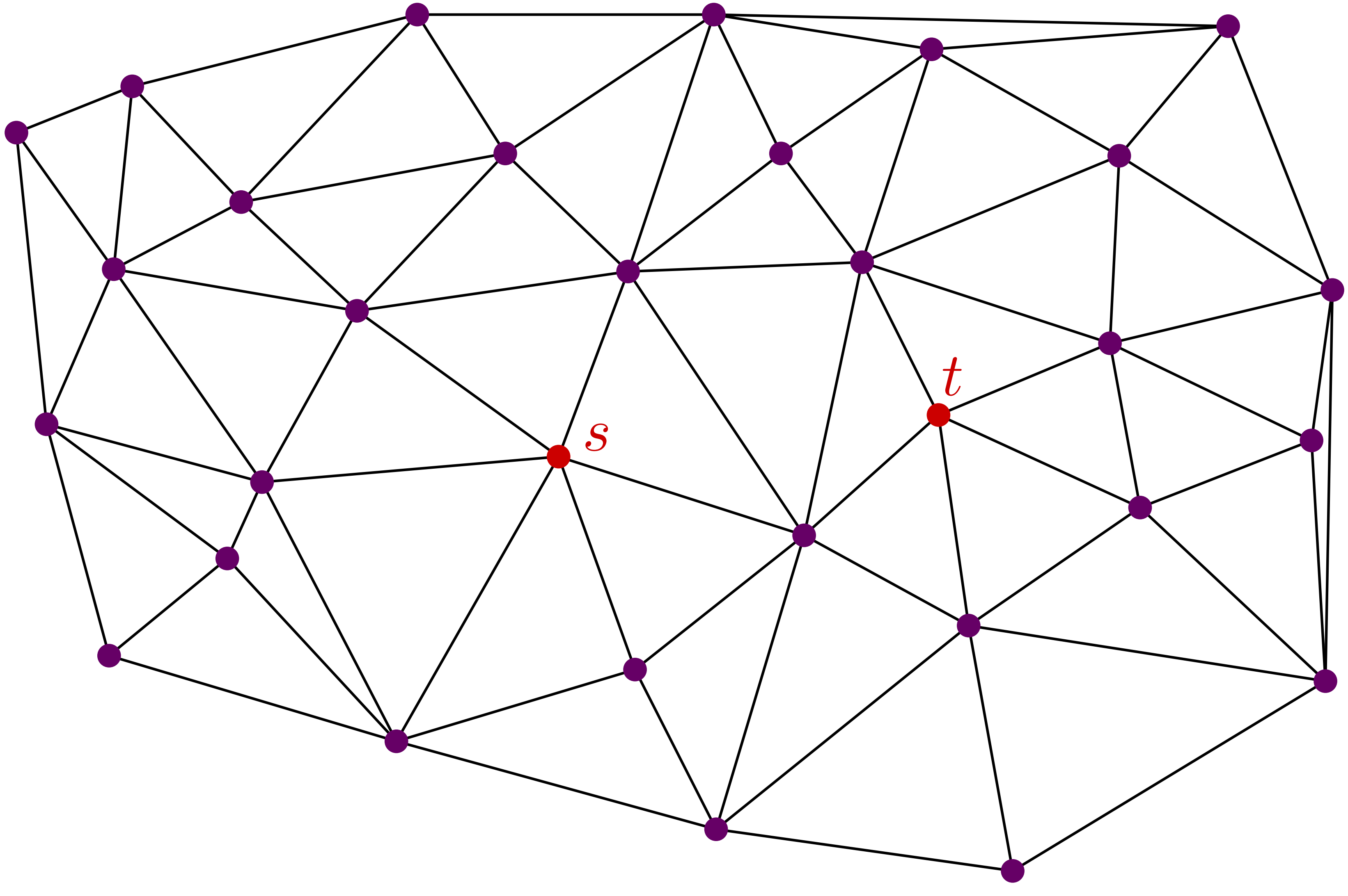
Il existe un plus court chemin rectifiable

Chemins à k arêtes



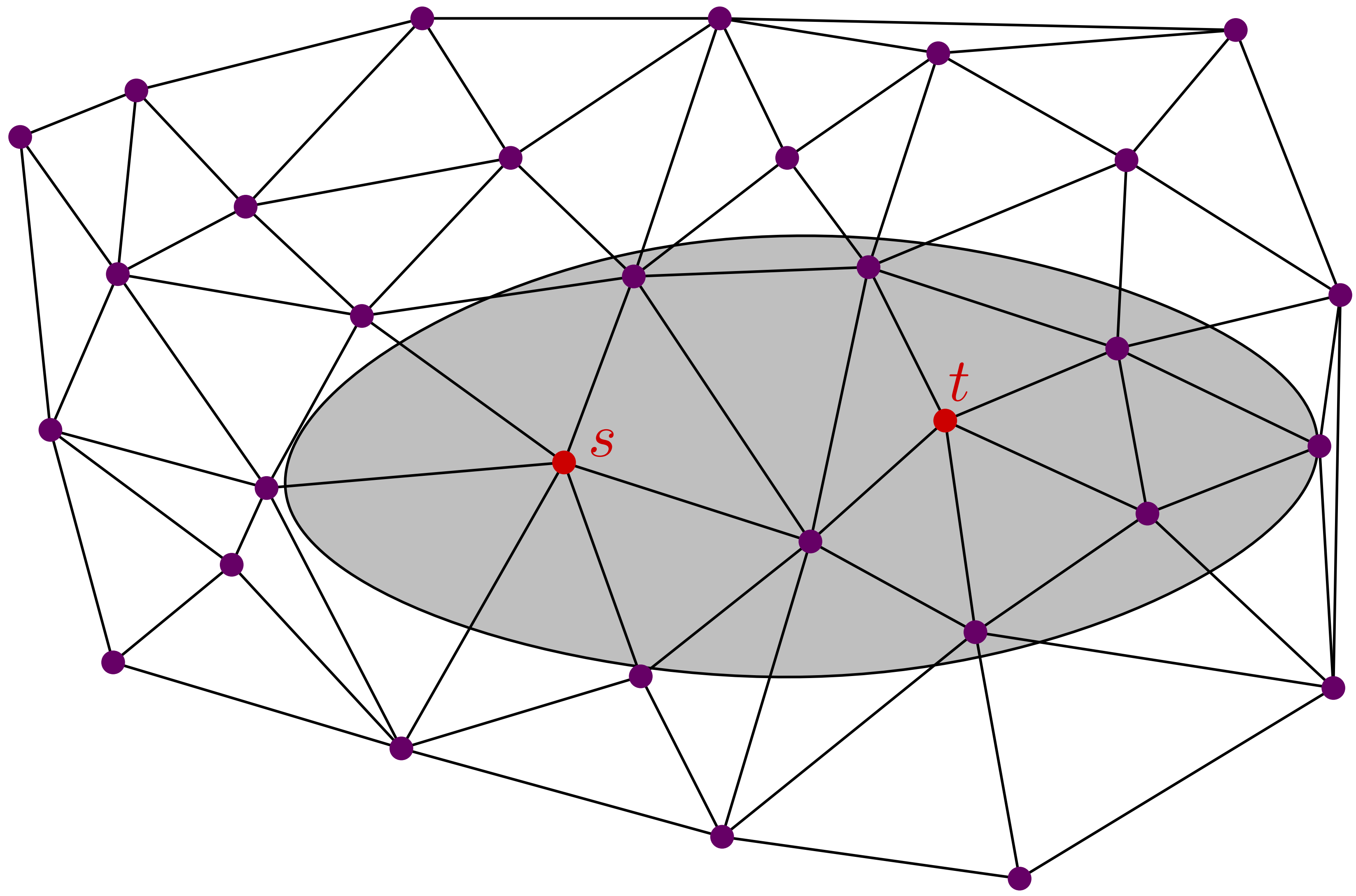
Restriction: les sommets du chemin sont sur des arêtes de la triangulation.

Algorithme



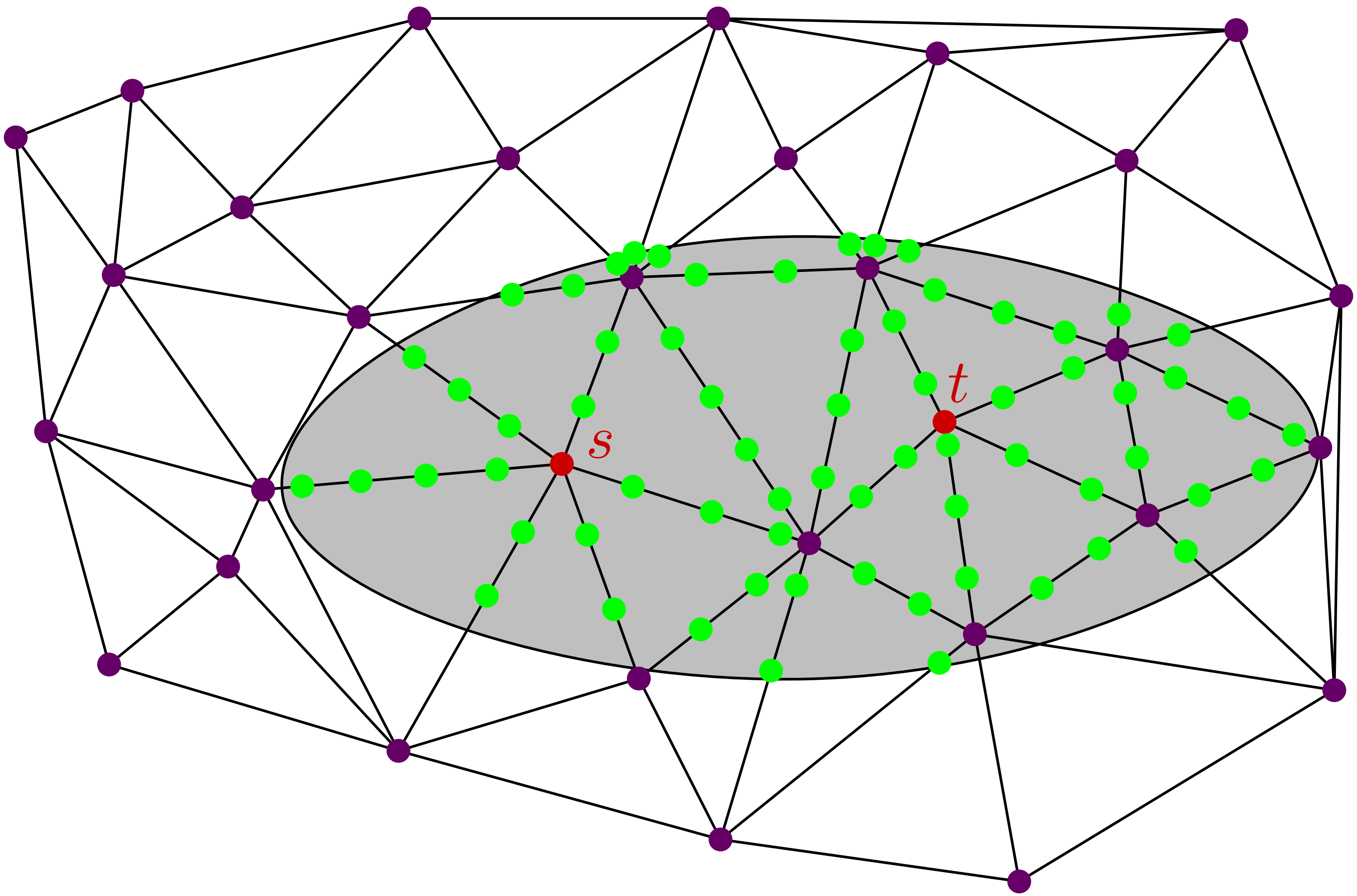
Algorithme

Ellipse de diamètre $\rho \; d(s,t)$ et de foyers s, t



Algorithme

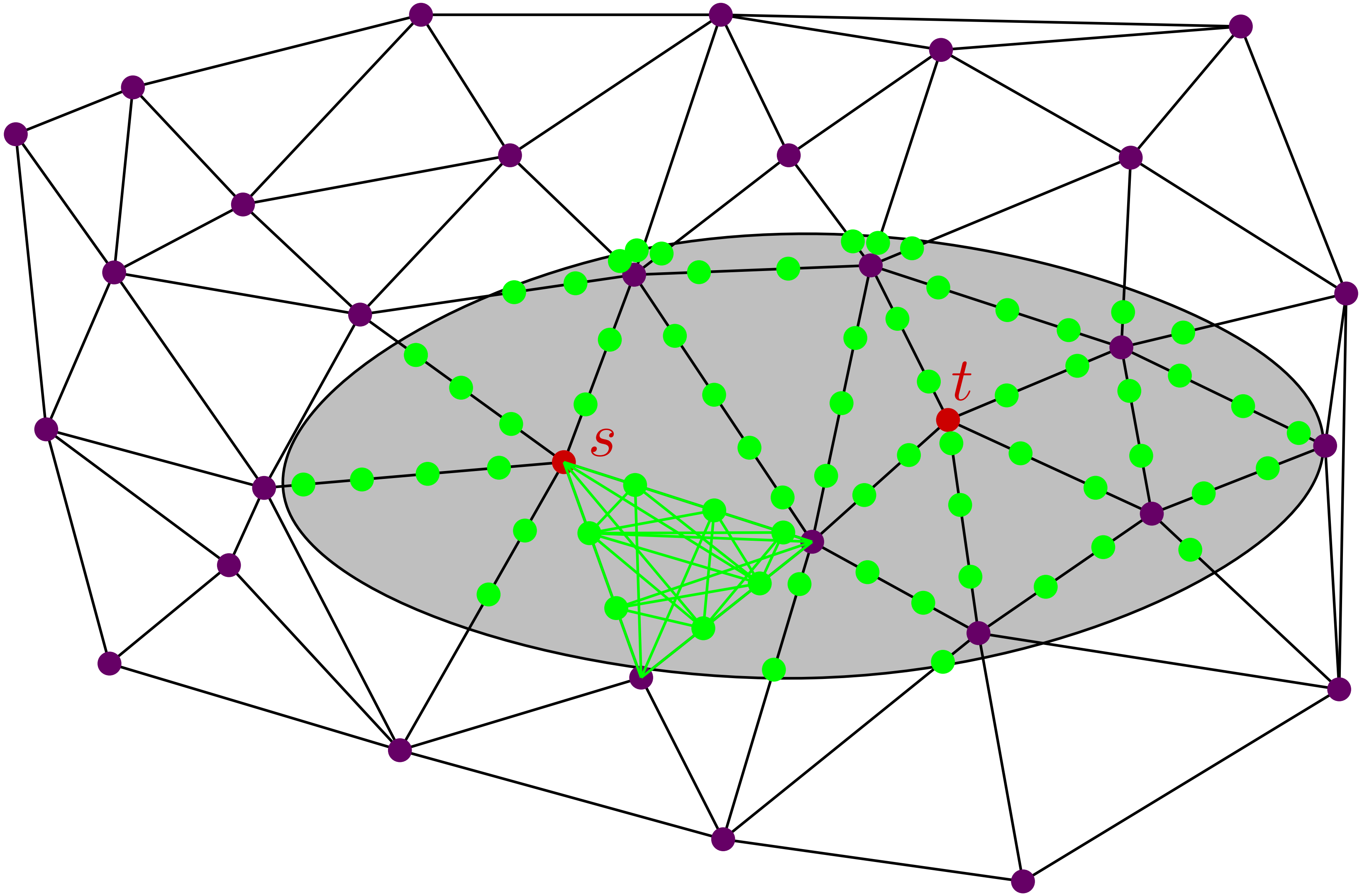
Ellipse de diamètre $\rho\ d(s,t)$ et de foyers s, t



Points de Steiner, espacement δ

Algorithme

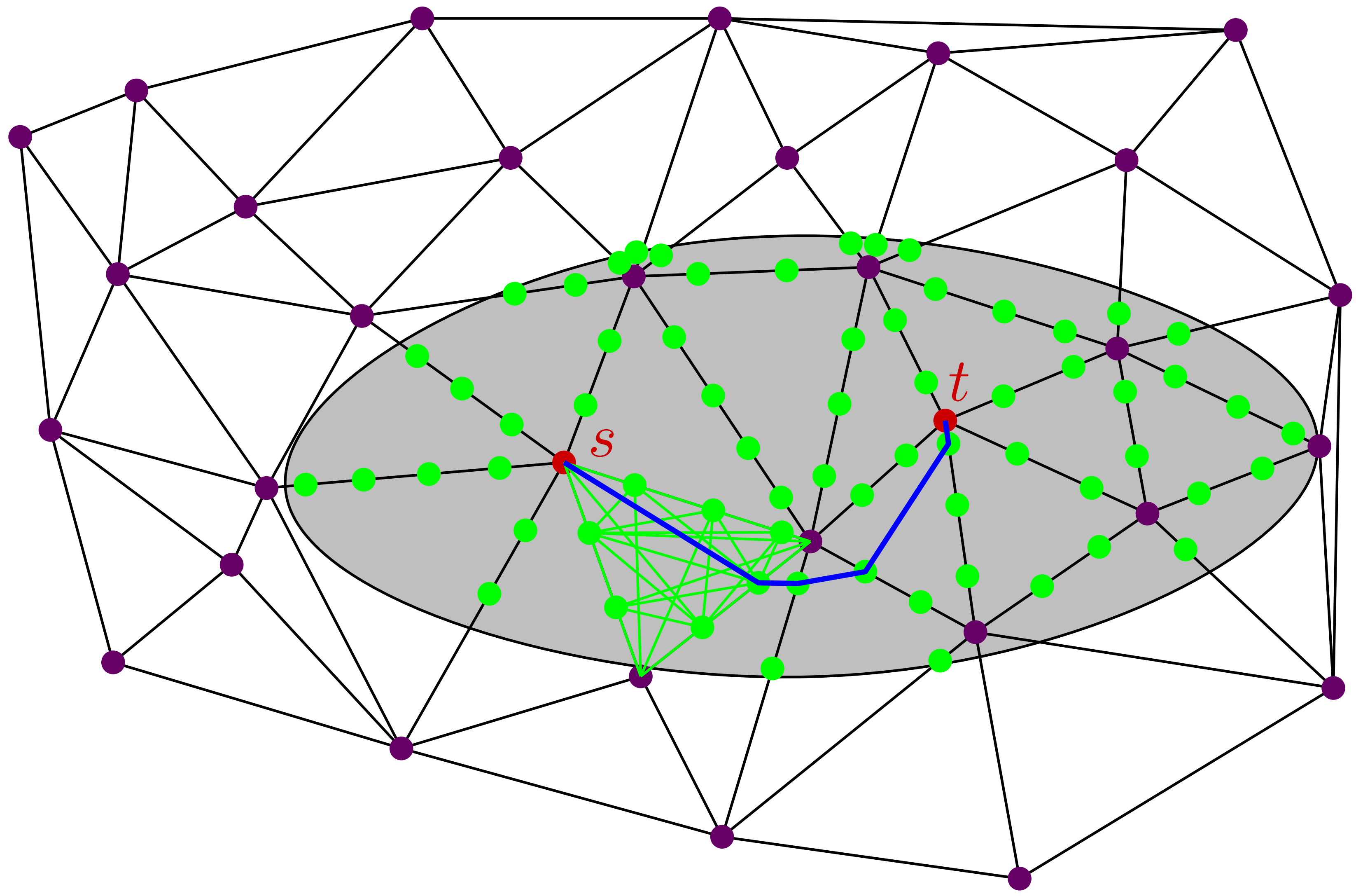
Ellipse de diamètre $\rho\, d(s, t)$ et de foyers s, t



Points de Steiner, espacement δ

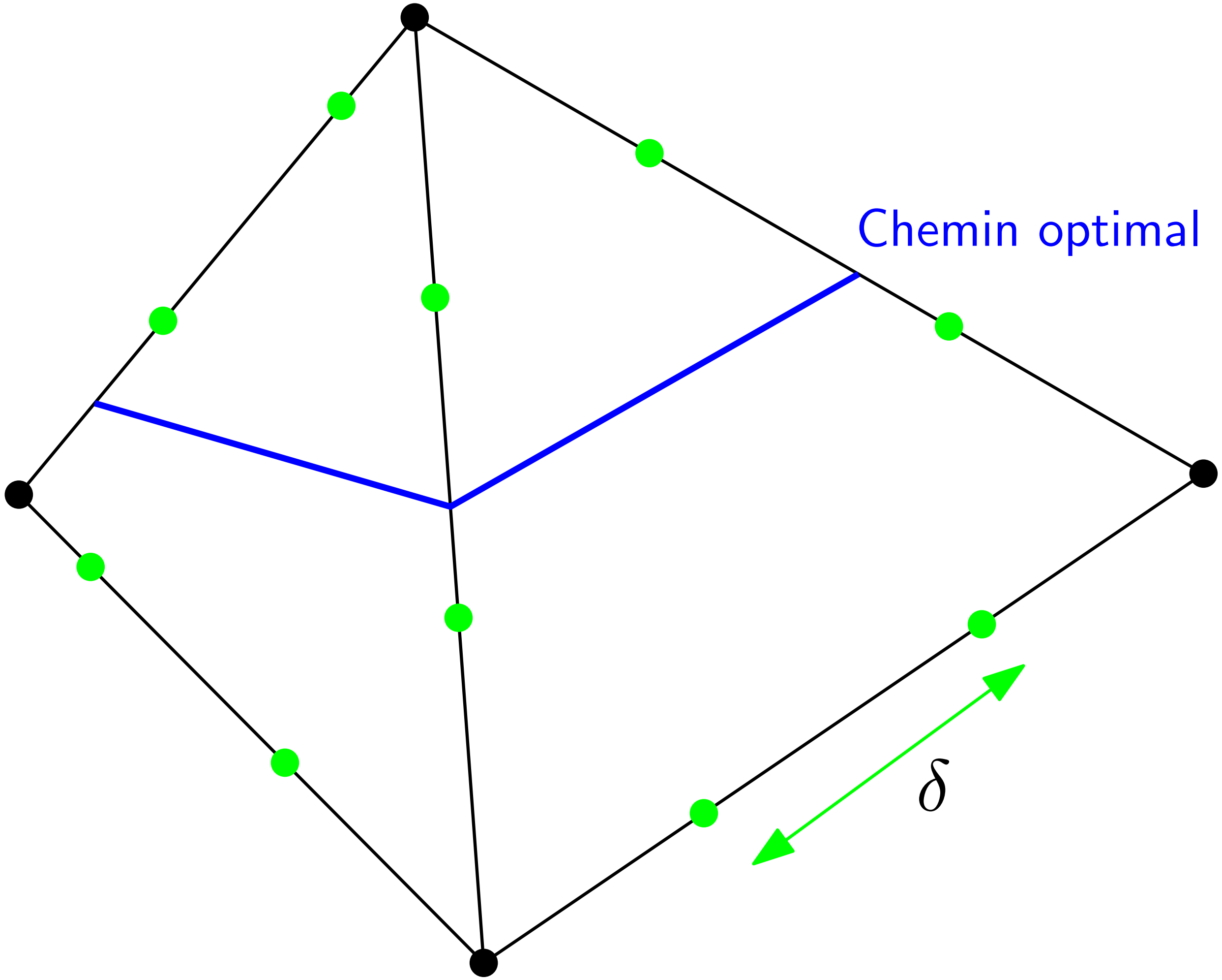
Algorithme

Ellipse de diamètre $\rho\ d(s,t)$ et de foyers s, t

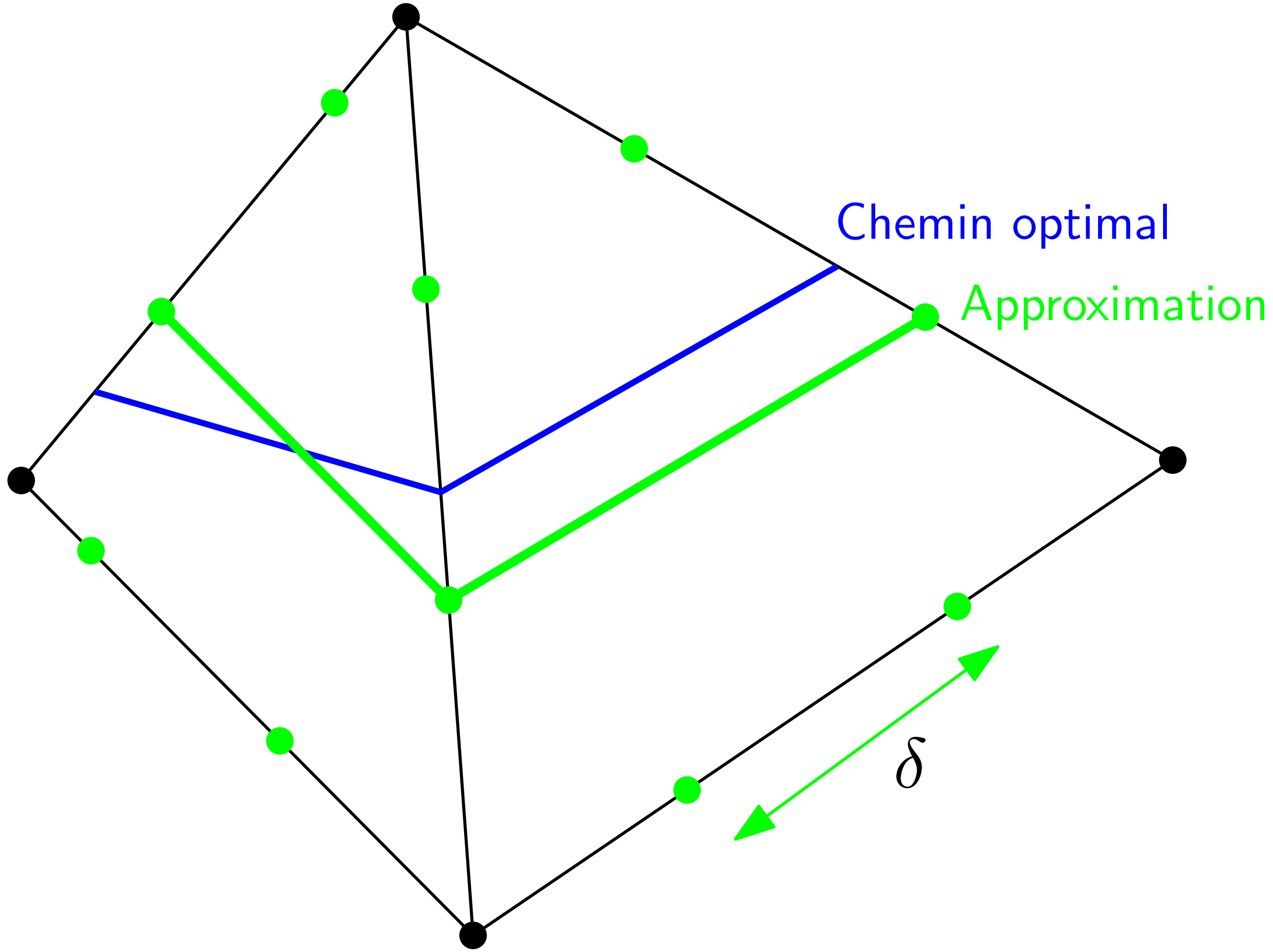


Points de Steiner, espacement δ

Borne d'erreur



Borne d'erreur



Pour chaque arête erreur $\leq \rho\delta$

Pour chaque arête erreur $\leq \rho\delta$

Erreur totale: $\leq k\rho\delta$

Pour chaque arête erreur $\leq \rho\delta$

Erreur totale: $\leq k\rho\delta$

Coût du chemin optimal $\geq d(s,t)$

Pour chaque arête erreur $\leq \rho\delta$

Erreur totale: $\leq k\rho\delta$

Coût du chemin optimal $\geq d(s,t)$

On choisit donc $\delta = \epsilon\ d(s,t)/k\rho$ pour obtenir une erreur multiplicative $\leq 1+\epsilon$.

Analyse

Nombre de points de Steiner par arête

Analyse

Nombre de points de Steiner par arête $\quad \leq k\rho^2/\epsilon$

Analyse

Nombre de points de Steiner par arête $\quad \leq k\rho^2/\epsilon$

Taille du graphe:

Analyse

Nombre de points de Steiner par arête $\quad \leq k\rho^2/\epsilon$

Taille du graphe: $\qquad O\left(n(k\rho^2/\epsilon)^2\right)$

Analyse

Nombre de points de Steiner par arête $\leq k\rho^2/\epsilon$

Taille du graphe: $O\left(n(k\rho^2/\epsilon)^2\right)$

Temps de calcul polynomial en $n, k, 1/\epsilon$ and ρ.

Analyse

Nombre de points de Steiner par arête $\leq k\rho^2/\epsilon$

Taille du graphe: $O\left(n(k\rho^2/\epsilon)^2\right)$

Temps de calcul polynomial en $n, k, 1/\epsilon$ and ρ.

Application aux plus courts chemins pondérés

Analyse

Nombre de points de Steiner par arête $\leq k\rho^2/\epsilon$

Taille du graphe: $O\left(n(k\rho^2/\epsilon)^2\right)$

Temps de calcul polynomial en $n, k, 1/\epsilon$ and ρ.

Application aux plus courts chemins pondérés

Mitchell et Papadimitriou: il y a un chemin optimal avec $k = O(n^2)$ arêtes.

Analyse

Nombre de points de Steiner par arête $\leq k\rho^2/\epsilon$

Taille du graphe: $O\left(n(k\rho^2/\epsilon)^2\right)$

Temps de calcul polynomial en $n, k, 1/\epsilon$ and ρ.

Application aux plus courts chemins pondérés

Mitchell et Papadimitriou: il y a un chemin optimal avec $k = O(n^2)$ arêtes.

$\Rightarrow$ Temps de calcul polynomial en n, $1/\epsilon$ and ρ.

Complexité du chemin

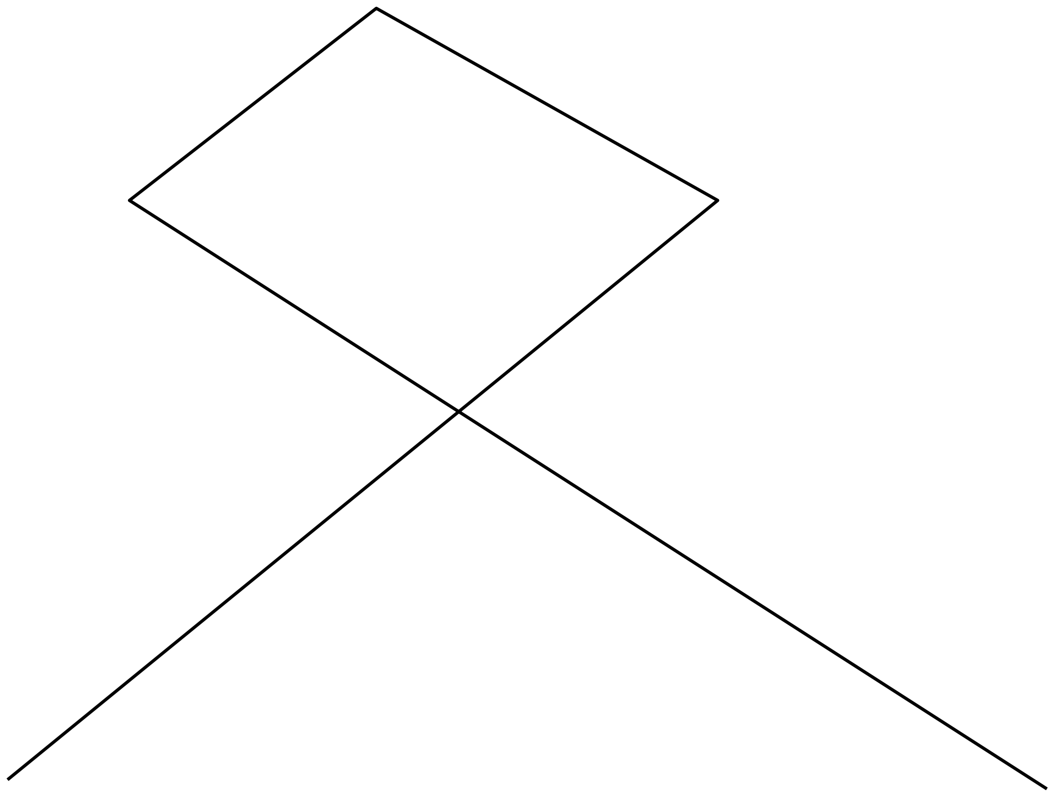
On montre qu'il y a un chemin à $O(\rho n^2/\epsilon)$ arêtes dont le coût est une $(1+\epsilon)$-approximation de l'optimal.

Complexité du chemin

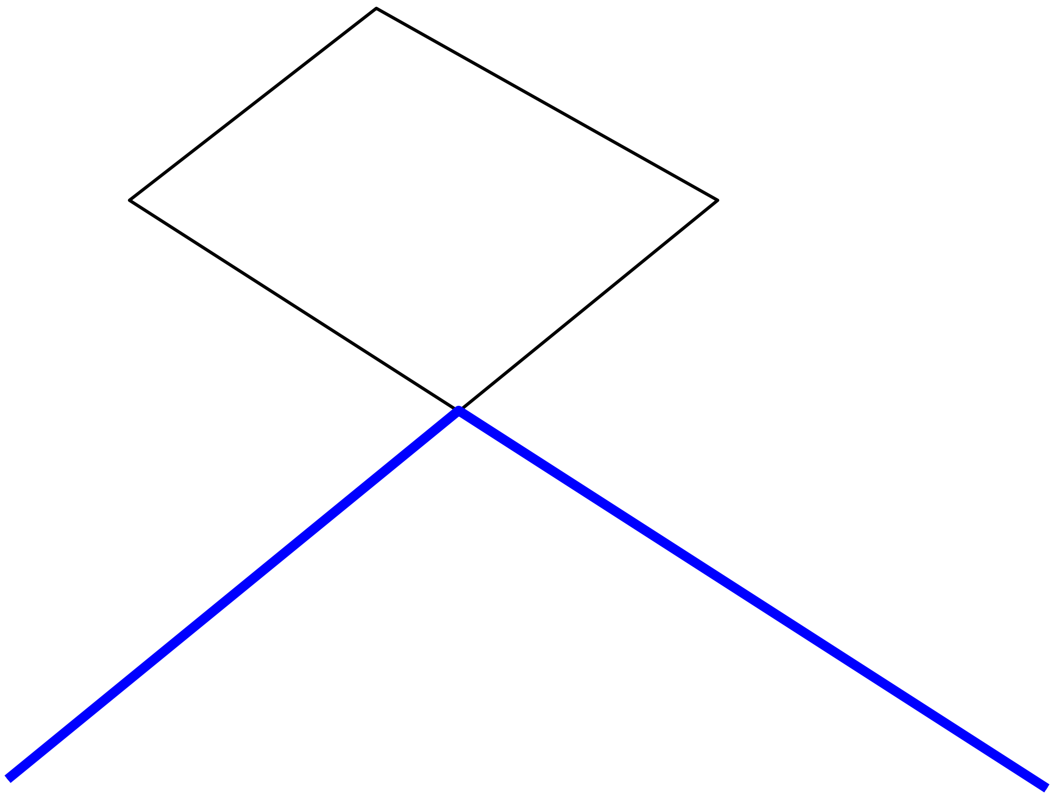
On montre qu'il y a un chemin à $O(\rho n^2/\epsilon)$ arêtes dont le coût est une $(1+\epsilon)$-approximation de l'optimal.

$\Rightarrow$ On peut calculer une approximation du plus court chemin anisotrope en temps polynomial en n, $1/\epsilon$ and ρ.

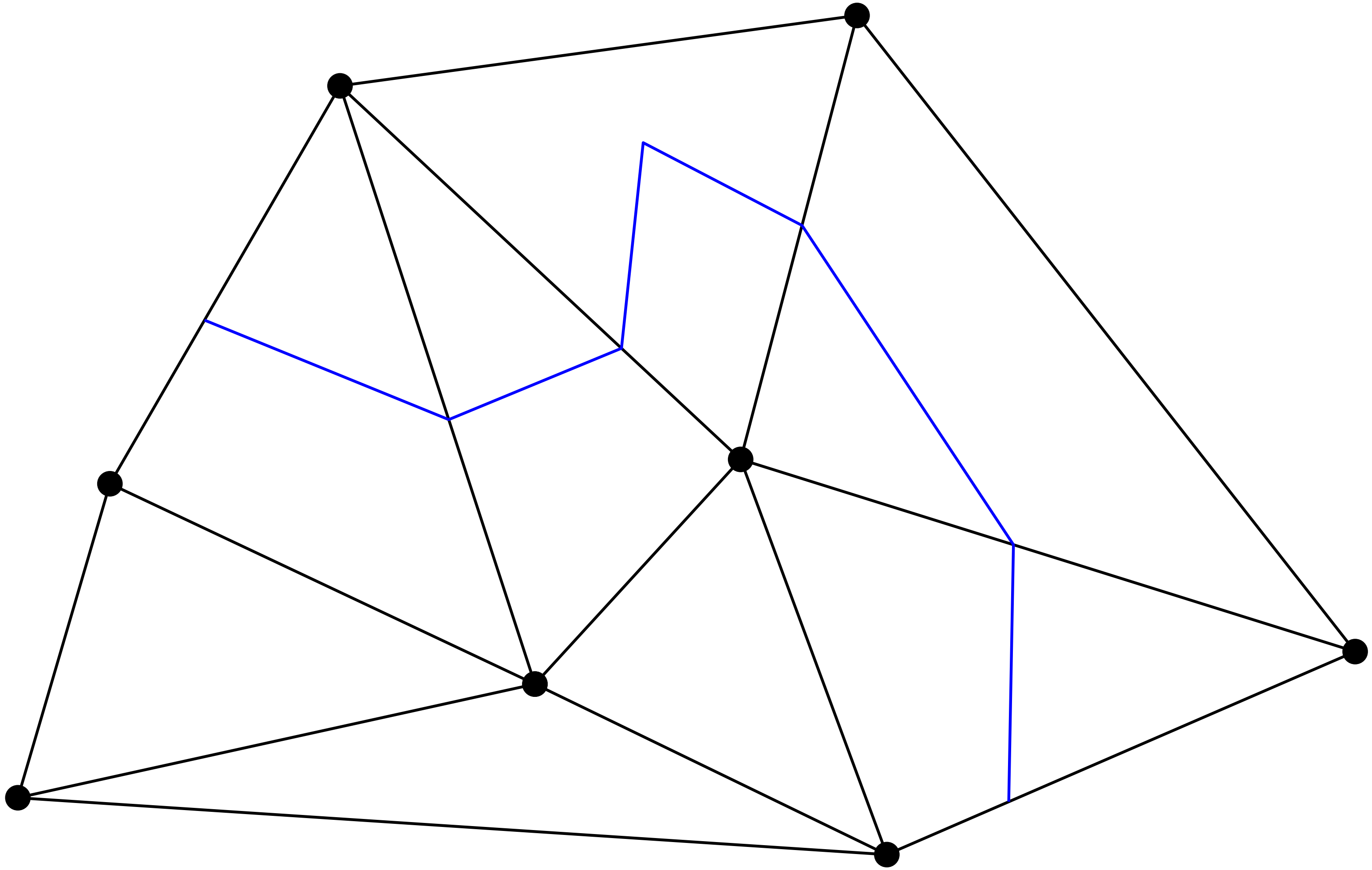
Simplification du chemin



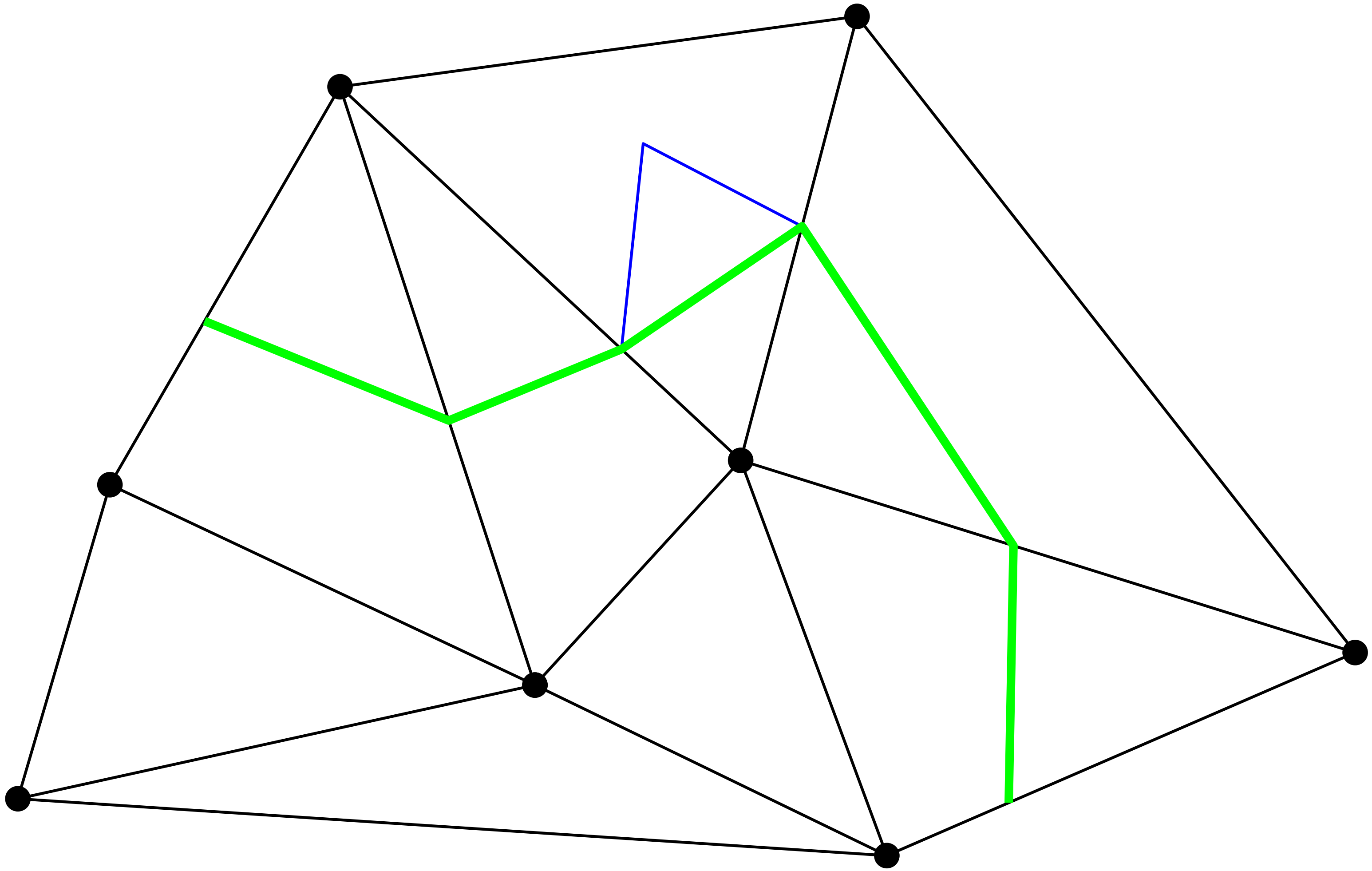
Simplification du chemin



Simplification du chemin

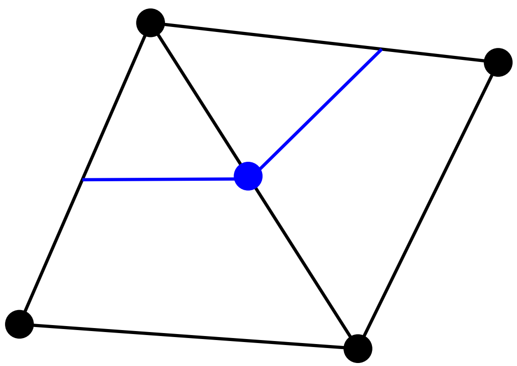


Simplification du chemin

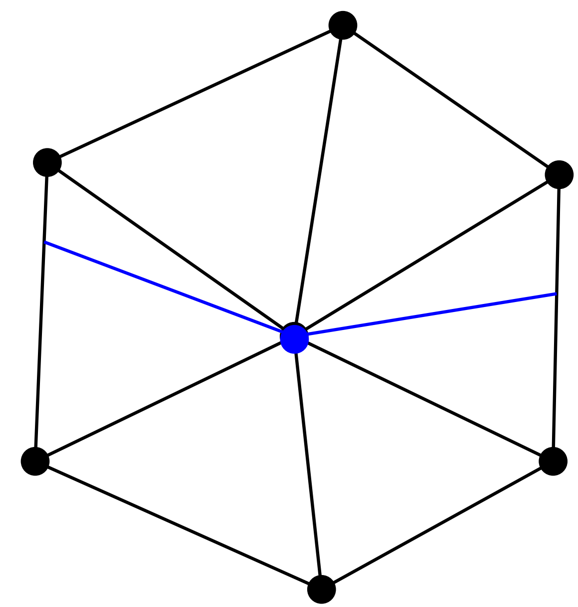


Classification des noeuds

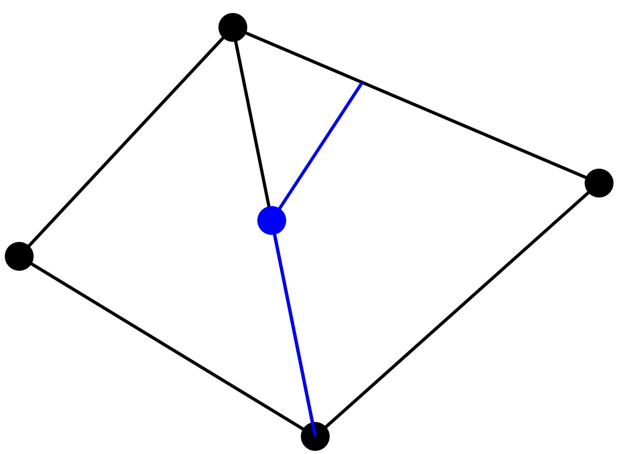
Noeud transversal



Noeud hérité

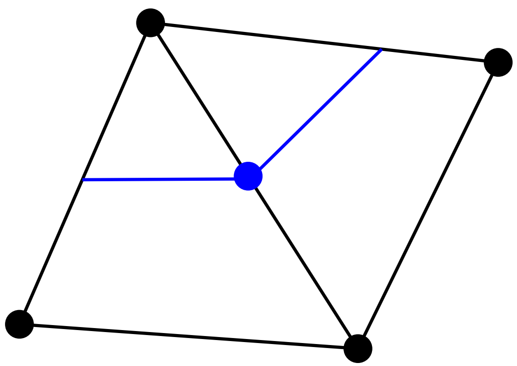


Noeud critique

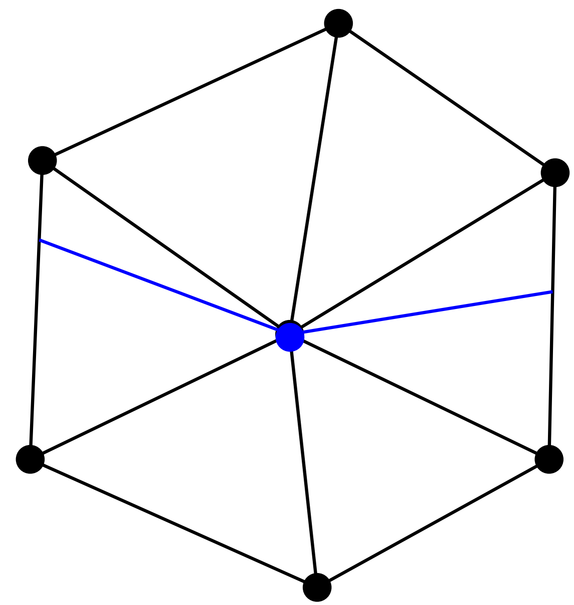


Classification des noeuds

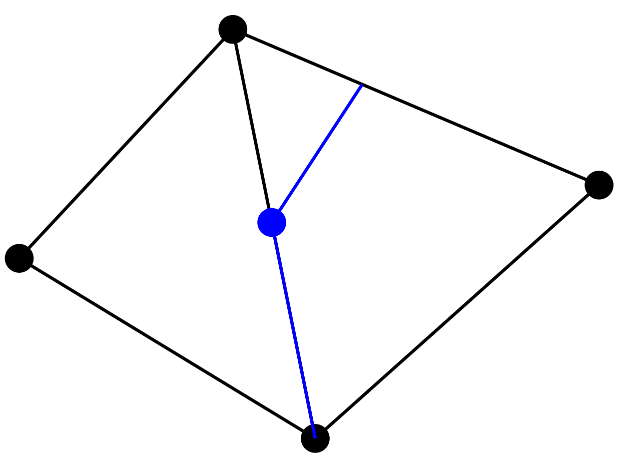
Noeud transversal



Noeud hérité

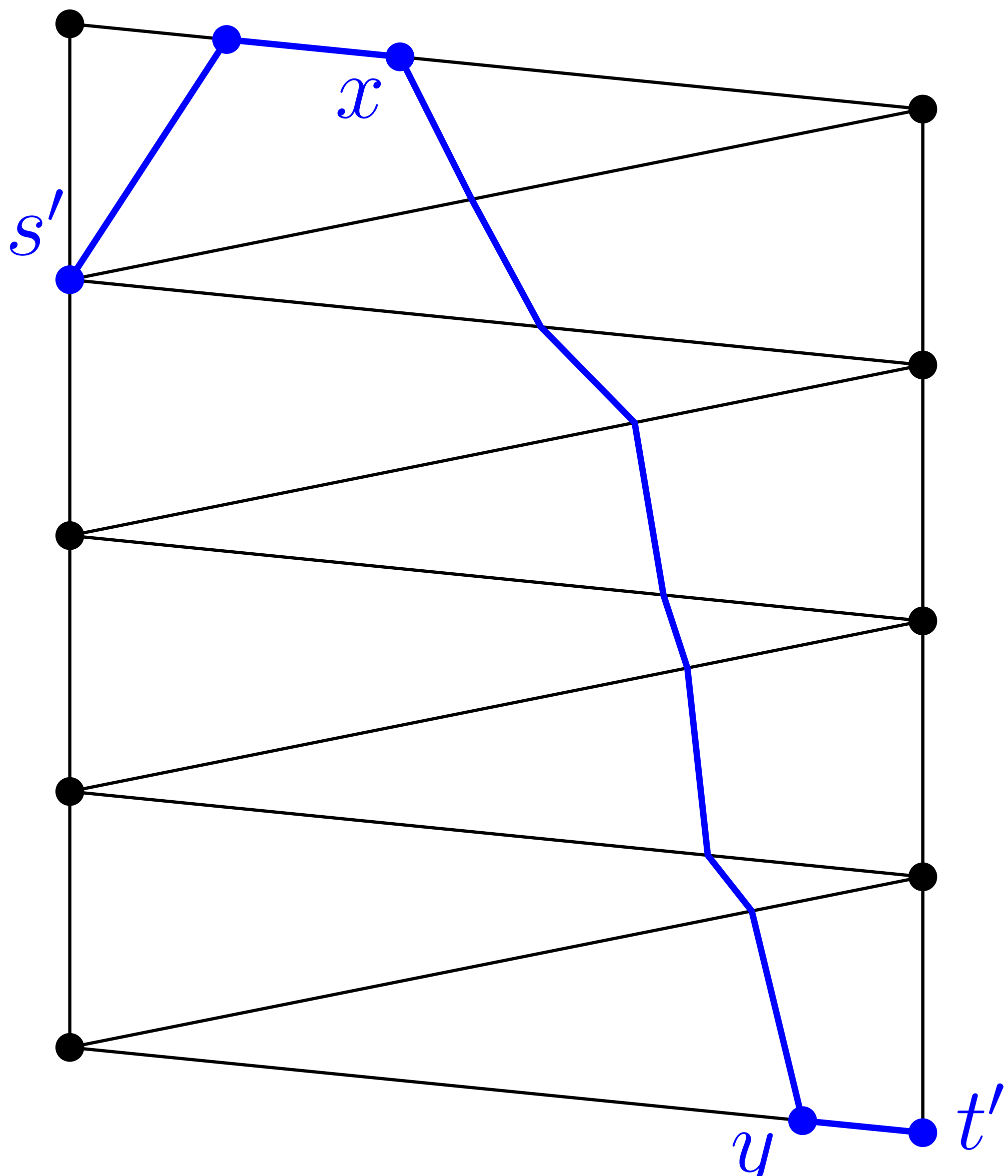


Noeud critique

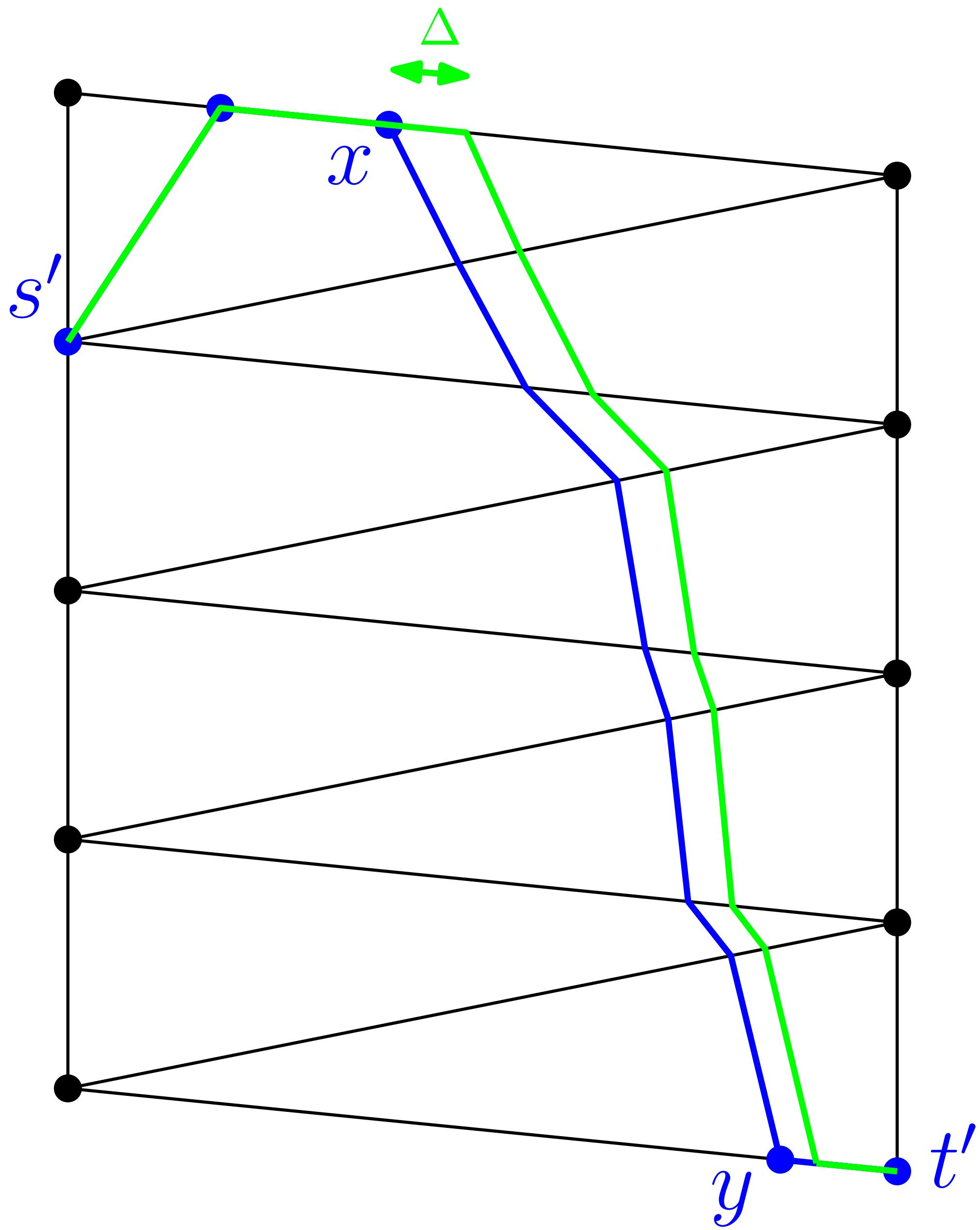


Après simplification, il ne reste plus que ces trois types de noeuds.

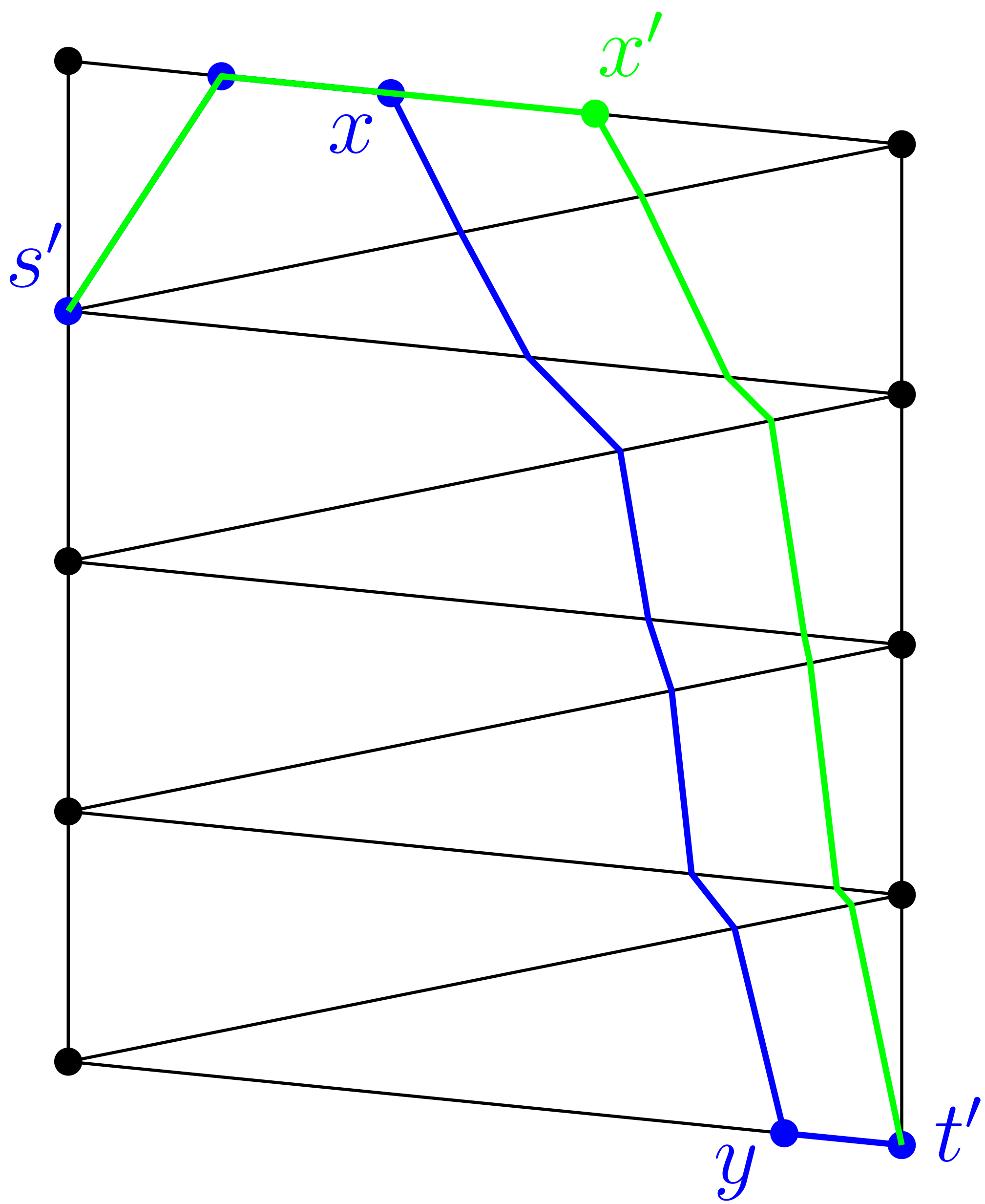
Simplification



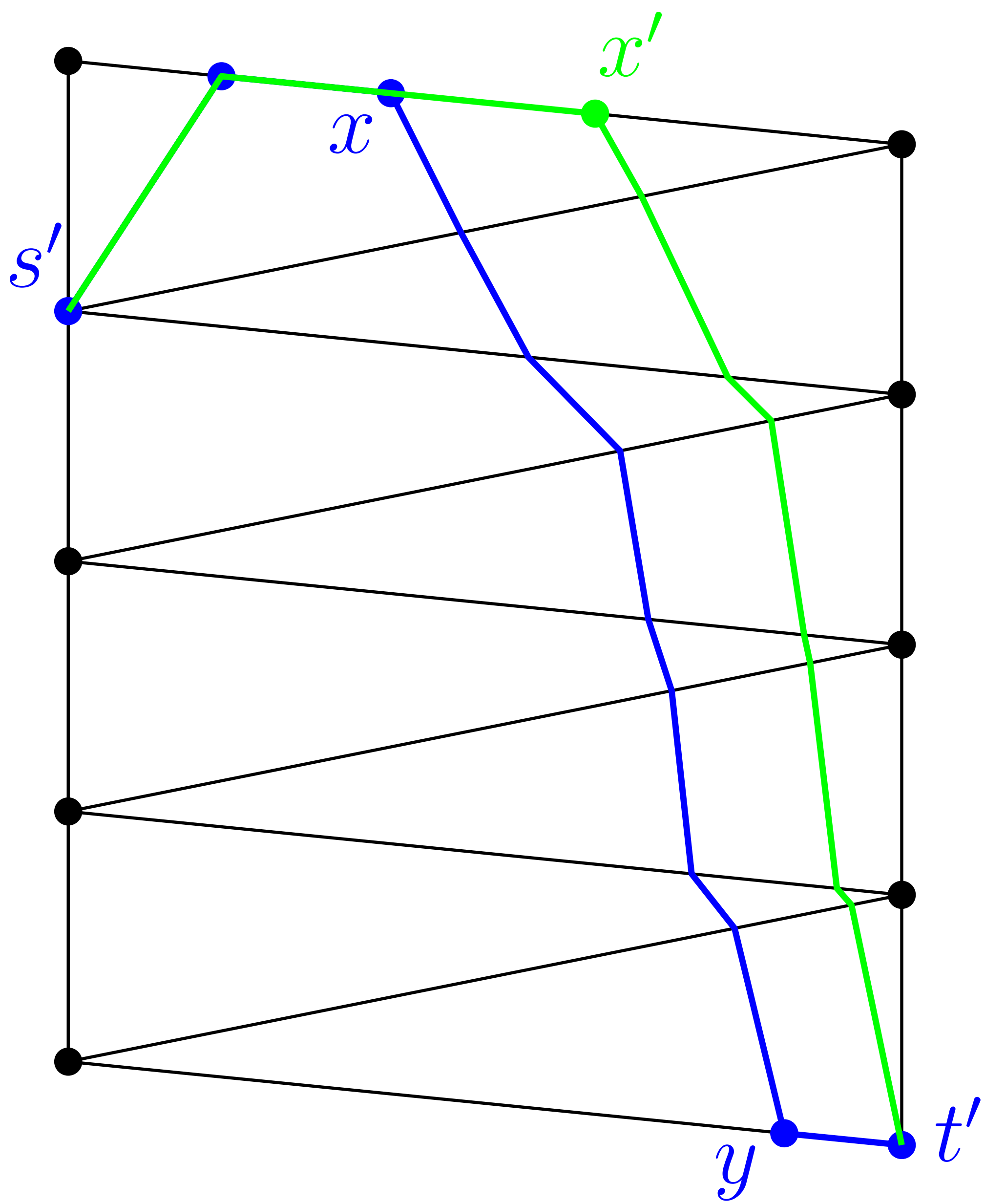
Simplification



Simplification

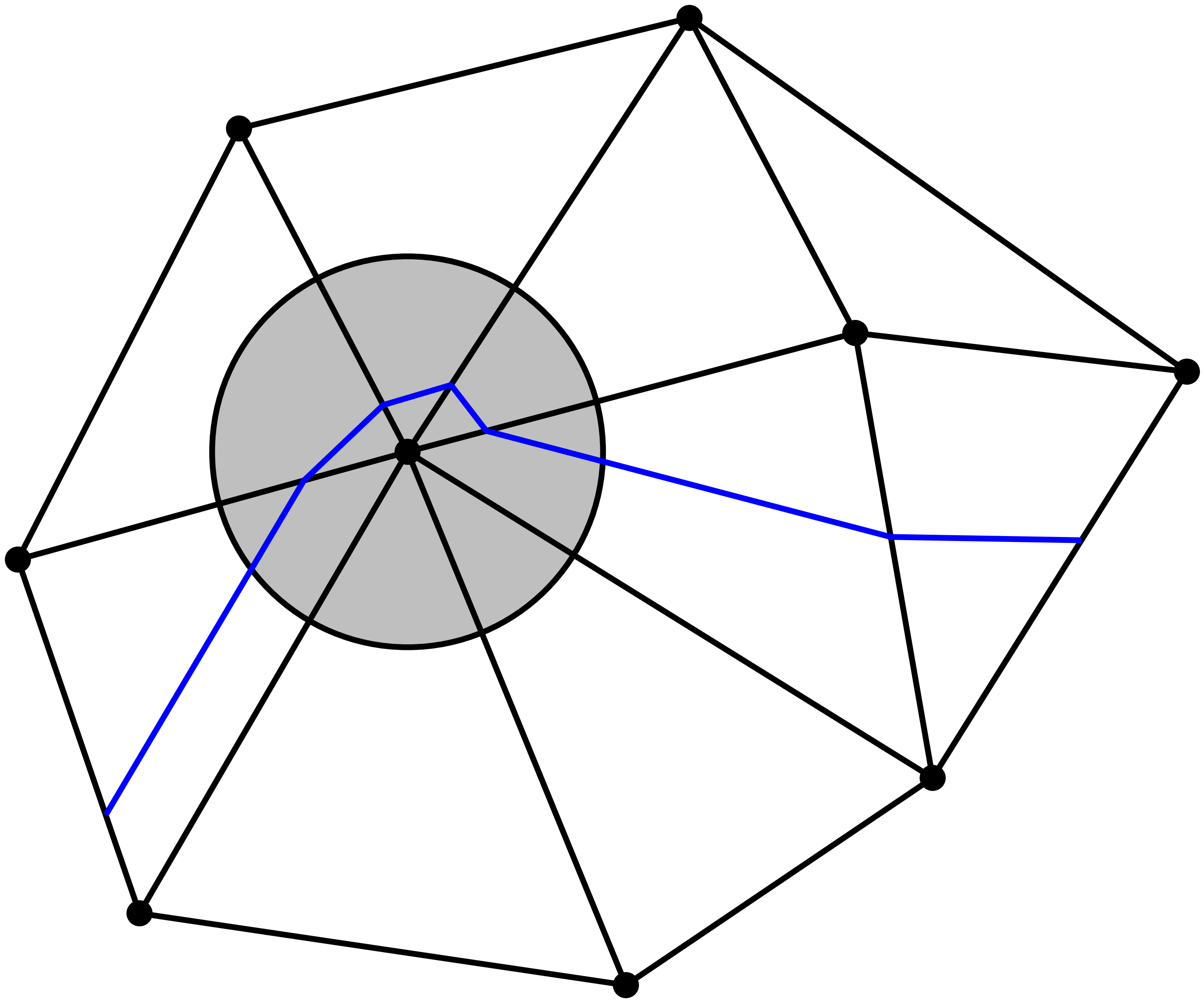


Simplification



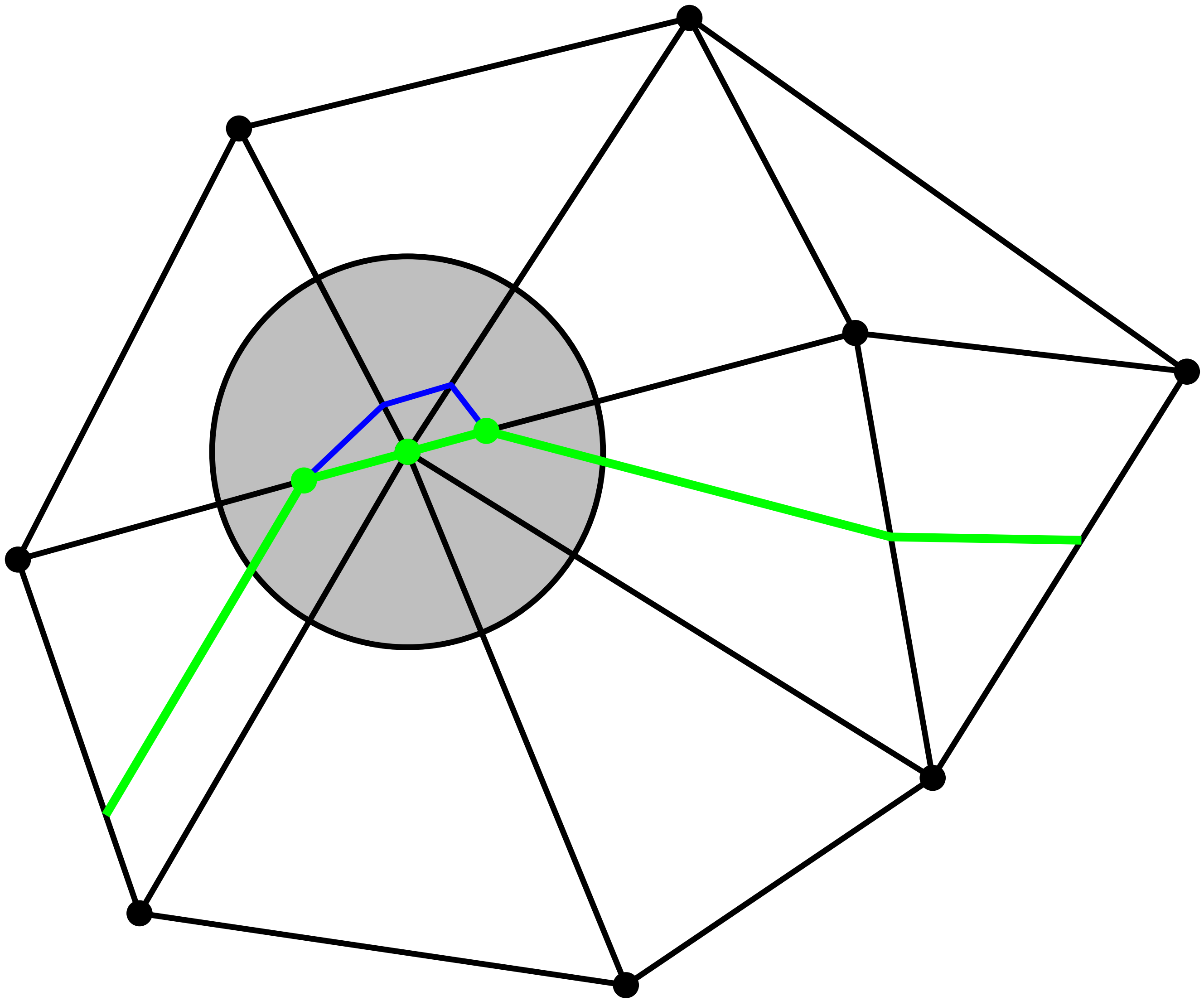
Il reste au plus deux noeuds critiques entre deux noeuds hérités

Raccourcis



Rayon $r_0 = \epsilon \times$ coût $/2\rho n$.

Raccourcis



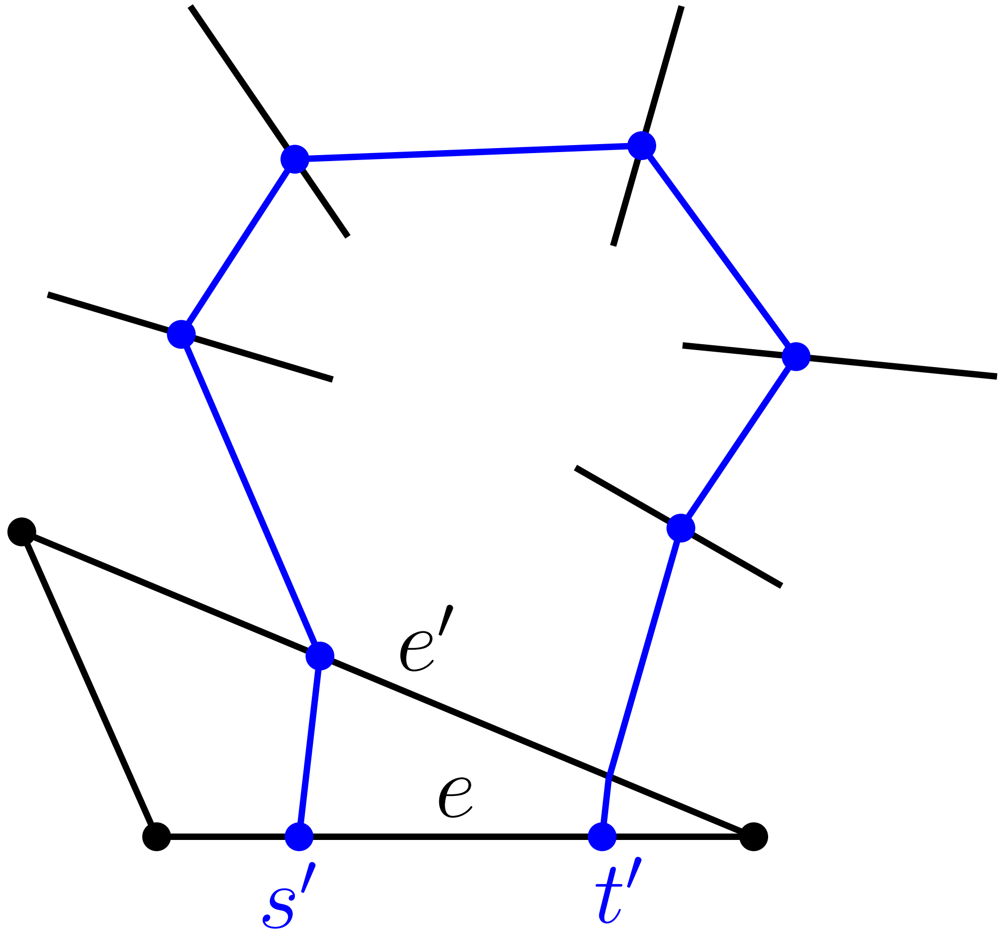
Rayon $r_0 = \epsilon \times$ coût $/2\rho n$.

Conclusion

Après ces transformations, le coût du chemin est au plus $(1+\epsilon)$ fois le coût initial, et il a $O(\rho n^2/\epsilon)$ arêtes.

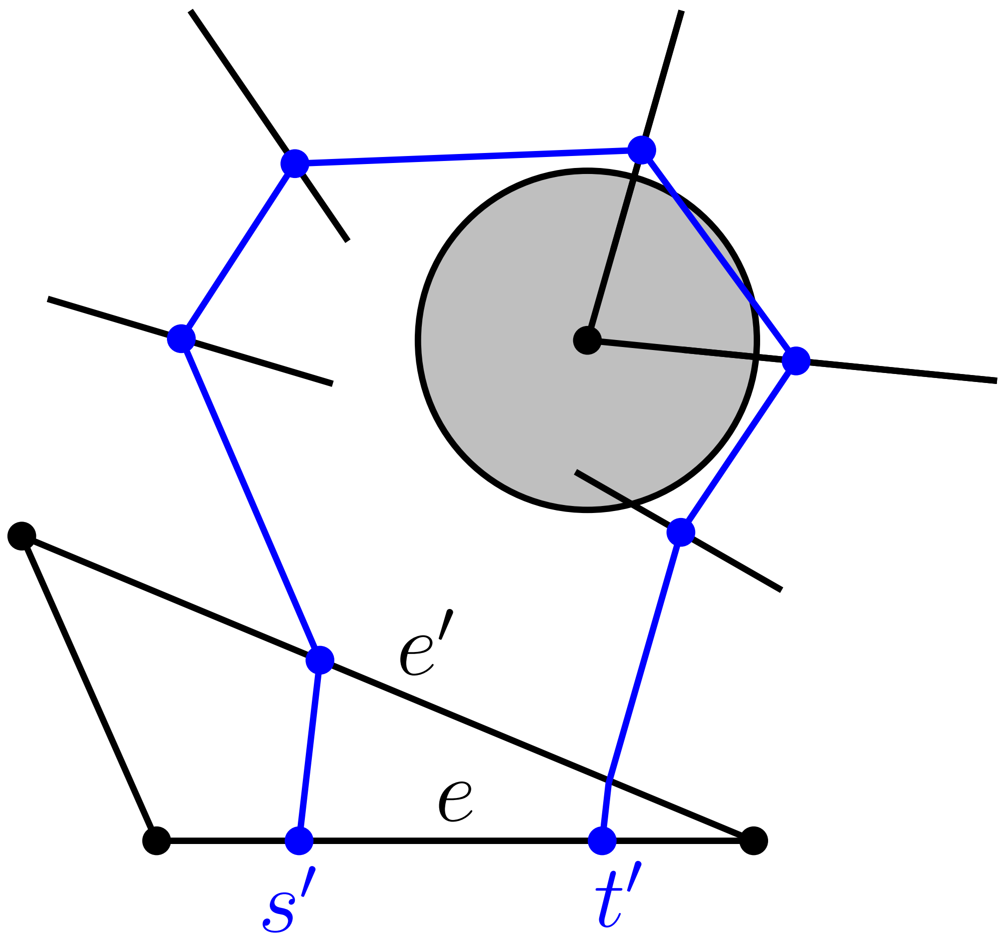
Conclusion

Après ces transformations, le coût du chemin est au plus $(1+\epsilon)$ fois le coût initial, et il a $O(\rho n^2/\epsilon)$ arêtes.



Conclusion

Après ces transformations, le coût du chemin est au plus $(1+\epsilon)$ fois le coût initial, et il a $O(\rho n^2/\epsilon)$ arêtes.



Conclusion

Après ces transformations, le coût du chemin est au plus $(1+\epsilon)$ fois le coût initial, et il a $O(\rho n^2/\epsilon)$ arêtes.